

О. НЕЙГБАУЕР

ЛЕКЦИИ
ПО ИСТОРИИ АНТИЧНЫХ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ I
ДОГРЕЧЕСКАЯ
МАТЕМАТИКА

ЭИТИ • ИИТИ • СССР • 1957

**VORLESUNGEN ÜBER
GESCHICHTE DER ANTIKEN
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN**

VON
O. NEUGEBAUER
KOPENHAGEN

ERSTER BAND
VORGRIECHISCHE MATHEMATIK

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

ЛЕКЦИИ ПО ИСТОРИИ АСТРОНОМИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ
ДОПОЛНЕННЫЕ МАТЕРИАЛАМИ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ
К ВОПРОСАМ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМИИ

МОСКВА И ЛЕНИНГРАД: ФИЗИМАТГИЗ
1966, 112 стр., 100 000 экз.

Адрес редакции: Москва, Третьяковский
проезд 1, Главная редакция общетехнической и техно-
теоретической литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА.

До последнего времени в истории математики господствовало представление, что родоначальницей нынешней математики является математика античного мира. Думали, что только в математике античного мира впервые появляются научные обобщения и доказательства; математика древнего Востока рассматривалась как собрание практических рецептов, выведенных грубо эмпирическим путем и вследствие этого содержащих грубейшие ошибки. Так, еще Кантор в своих лекциях по истории математики утверждал, что, по египетским представлениям, площадь равнобедренного треугольника равна произведению основания на боковую сторону, — формула, которая для огромного большинства случаев является не приближенной, а просто грубо неверной. Сообщениям древних греков о том, что их геометрия позаимствована у египтян и что виднейшие греческие математики ездили учиться геометрии в Египет, обычно не верили: в них видели только частный случай общеизвестной тенденции греков возводить всю свою культуру к древневосточным прототипам.

В 1917 г. русский учепый, акад. Б. А. Тураев, опубликовал в *Ancient Egypt* начертательную па папирусе, хранящемся в Москве, египетскую задачу. Оказалось, что уже в эпоху Среднего царства египтянам была известна точная формула для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. Это повело к пересмотру вопроса о египетской математике. Акад. В. В. Струве в своем издании московского папируса¹⁾ показал, что указанные выше грубо неверные египетские формулы для площади треугольника обязаны своим существованием неправильному толкованию соответствующих терминов в папирусах. В одной из задач папируса он открыл даже формулу для поверхности шара, но это открытие вызвало возражения со стороны некоторых египтологов, и пока вопрос остается открытым. Все эти открытия вызвали пересмотр всего вопроса о роли египетской геометрии в истории математики.

В 1931 г. появляются и в Германии и в Англии новые обзоры египетской геометрии²⁾; в 1932 г. автор этой статьи подверг рассмотрению в особой статье вопрос о египетском влиянии на греческую геометрию³⁾.

¹⁾ *Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau*, Berlin, Springer, 1926.

²⁾ О. Neugebauer, *Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte*, см. ниже, стр. 184, IV, 6; T. H. E. Peet, *Mathematics in Ancient Egypt*, см. ниже, стр. 184, IV, 4.

³⁾ Архив истории науки и техники, вып. 1, стр. 45—70.

Но пока ученые вели споры о значении содержащихся в Московском папирусе египетских задач, учеными-ассириологами были сделаны еще гораздо более поразительные открытия. Были расшифрованы сотни клинописных математических текстов, написанных как на древнейшем шумерийском, так и на семитическом (аккадском) языках. Оказалось, что в области геометрии вавилоняне ничуть не уступали египтянам; но гораздо поразительнее другое: в то время как нам ничего неизвестно о какой-либо примитивной алгебре у египтян, а греки, поскольку мы можем заключить из труда Евклида, считали лужным решать вопросы алгебры чисто геометрическим путем (геометрическая алгебра), вавилоняне, как это видно из множества соответствующих текстов, решали большое количество вопросов способом, содержащим уже зачатки алгебры.

От сравнительно поздней эпохи (III век н. э.) до нас дошел труд грека Диофанта, довольно ловко оперирующего сравнительно сложными алгебраическими выкладками. Ясно, что Диофант должен был иметь целый ряд предшественников. И в самом деле, нам известно, что наряду с геометрией у греков существовала особая наука — логистика, охватывающая нашу арифметику и отчасти алгебру. Уже со времени Платона она третировалась как низшая, прикладная дисциплина, не входящая в круг образования философа и ученого. Поэтому до нас не дошло ни одной книги по греческой логистике; но из трудов Архимеда и Герона мы видим, что, например, правила извлечения квадратного и кубического корней, очевидно, были даны и обоснованы в курсах логики; поэтому указанные авторы применяют эти правила как общеизвестные. Сама собой напрашивается мысль, что эта греческая алгебра имеет своим источником вавилонскую; такое предположение в самом деле подтверждается на ряде частных совпадений.

Эти вновь возникшие проблемы и побудили Нейгебауера издать трехтомный курс лекций по истории античных математических наук, в котором первый том (уже вышедший и предлагаемый здесь в переводе) посвящен догреческой математике, второй будет посвящен греческой математике, а третий — точной астрономии у вавилонян и греков.

Изучение вавилонских текстов привело Нейгебауера к очень высокой оценке вавилонской алгебры. По его мнению, для этой алгебры характерно «полное овладение всей областью рациональных чисел»; он, не колеблясь, готов приписать вавилонянам сложнейшие алгебраические преобразования с целью суммирования рядов (см. ниже, стр. 192), ибо «здесь нет ничего, что превышало бы силы вавилонской математики»; он полагает, что вавилоняне не только без труда решали квадратные и биквадратные уравнения, но обладали и хорошо разработанной процедурой для приведения любого кубического уравнения к каноническому виду $x^3 + x^2 = c$. Как мы покажем ниже, эти утверждения представляют собою несомненные преувеличения; тем не менее достижения вавилонской математики остаются громадными, и, в частности, громадные шаги в направлении алгебраизации математики. Эти увлечения, естественные для пионера в новой области, не умаляют, таким образом, значения открытий Нейгебауера, составляющих эпоху в научной истории математики.

Есть у книги Нейгебауера и внешний недостаток, делающий многие утверждения автора недостаточно убедительными. Полное издание текстов, лежащих в основе его лекций, еще не вышло к моменту появления в свет книги: оно недавно лишь появилось в серии *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* под заглавием *Mathematische Keilschrifttexte* (см. ниже, стр. 232, V, 4). Между тем приводимые им тексты автор обычно дает только в нынешней алгебраической транскрипции, так что мы не в состоянии судить, насколько точно эта транскрипция передает ход мыслей древневосточного ученого; как мы увидим, в некоторых случаях этот ход мыслей пужно восстанавливать совсем по-иному.

Если принять во внимание, что автор — немец, которого фашистский переворот застиг еще в Германии (ныне он профессор в Копенгагене, хотя книга и вышла в свет в Берлине), то ряд его высказываний получит особо глубокое значение. Мы знаем, что работы по истории математики сплошь и рядом служат целям националистической и даже шовинистической пропаганды: авторы их видят цель своего труда в том, чтобы показать, что именно их родине принадлежит особенно выдающаяся роль в истории математики. На ряде страниц они стараются *per fas et nefas* доказать, что в том или ином крупном математическом открытии приоритет принадлежит именно представителю их страны или что тот или иной ученый является их соплеменником (спор о приоритете Ньютона и Лейбница; спор о национальности Коперника). Особенно выделяются в этом отношении итальянские ученые, даже не дающие себе труда замаскировать эти ненаучные импульсы.

Совсем другой характер носит труд Нейгебауера. Он с самого же начала (в предисловии) заявляет, что «читатель, интересующийся преимущественно вопросами приоритета, найдет мало интересного в этих лекциях». Далее, главную роль в создании предпосылок для нынешней математики Нейгебауер отводит семитам — вавилонянам, а не арийцам — грекам; уже один этот факт получает особый смысл в книге, появившейся в стране «расовой проблемы». Но Нейгебауер идет еще дальше: он считает оперирование с национальными особенностями вообще ненаучным приемом и, наоборот, удивительный расцвет математики в Вавилонии он объясняет прежде всего с м е ш с н и с м п а ц и о н а л ь н о с т е й (см. ниже, стр. 77 и сл.). Он показывает, что такое гениальное открытие, как позиционная шестидесятеричная система, не была продуктом гениального творчества какого-либо научного «Führer'a» прошлых эпох, а возникла постепенно, путем приспособления к новым условиям, причем она сохранила еще явные следы, рудименты уже пройденных стадий. Исходным пунктом в этом развитии является экономический фактор, приведший к системам мер, различным в каждом городе-государстве. Развитие междугосударственных отношений приводит к тому, что приходится эти самодовлеющие системы поставить в зависимость друг от друга; при этом фактически должно было оказаться, что отношения между единицами мер разных городов-государств (или различных групп мер в одном и том же государстве) выражались несокругленными числами (смешанными дробями с большим знаменателем). Это создавало крупные затруднения для оборота; поэтому

пришлось эти отношения упростить, а поскольку уже в древнейшее время оперировали с $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, наиболее удобным оказалось отношение 1:6. При таком отношении между единицами в двух системах мер в объединенную систему прекрасно укладываются и $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ (они равны 3 и 2 низшим мерам). В соединении с существовавшей с древнейших времен десятичной системой получаем новое отношение 1:60. С другой стороны, применение в различных городах разных систем мер привело к тому, что с появлением письменных знаков для мер один и тот же знак в разных городах стал обозначать неодинаковые меры. При соединении разных систем мер в одну это привело к тому, что один и тот же знак получал разное значение в зависимости от места в написании составного именованного числа, т. е. к позиционной системе обозначения. Первоначально речь шла главным образом о мерах веса (игравших роль денежных единиц), но затем знаки для этих мер были распространены и на числа вообще. При переходе шумерийского письма к семитам, людям, говорившим на совершенно ином языке, шумерийские пиктоглифы, служившие для обозначения математических понятий, стали уже восприниматься не как комплекс определенных звуков, а как чисто математические символы. Это повело к возникновению древнейшей в мире математической символики. Таким образом Нейгебауер кладет во главу угла своей красивой и убедительной реконструкции не гениальную интуицию ученых прошлого и даже не внутринаучные потребности, а экономические потребности, потребности оборота.

Как я указал уже выше, Нейгебауер увлекся открывшейся перед ним грандиозной картиной развития вавилонской математики и несколько модернизировал ее. С его точки зрения, поскольку речь идет о положительных рациональных числах, вавилонская алгебра принципиально ничем не отличается от нынешней. Это утверждение, однако, неверно; чтобы не быть голословным, я позволю себе в подстрочных примечаниях подвергнуть разбору важнейшие из приведенных Нейгебауером примеры (см. стр. 193, 205 и далее). Дошедшие до нас памятники содержат, правда, лишь готовые рецепты-решения, поэтому ход мыслей их составителей мы вправе реконструировать по-разному. Но уже а priori ясно, что если данные на табличках решения можно получить при помощи более элементарных процедур, то постулировать современные алгебраические методы у вавилонян нет никаких оснований.

В подстрочных примечаниях к отдельным разбираемым у Нейгебауера задачам на уравнения первой степени я показываю, что весь ход действия на табличках может быть гораздо лучше, чем у Нейгебауера, осмыслен чисто арифметически, методом ложного предположения, и что поэтому в разбираемых задачах больше основания видеть предшественников соответственных типичных индийско-арабских арифметических задач, чем нынешней алгебры.

Правда, задачи на квадратные уравнения по самому своему существу не могут быть осмыслены арифметически. Но Нейгебауер ни в одном случае не показал, что алгебраическая интерпретация является единственно возможной: я в своих примечаниях стараюсь показать большую вероятность геометрического толкования. Я вообще уверен, что на той стадии, на которой находилась вавилонская математика,

решение задач на квадратные уравнения могло при доказательстве осмысливаться только геометрически, так, как это было в Египте и Греции.

Правда, Нейгебауер в противовес этому предположению указывает на то, что вавилоняне умели решать и неоднородные квадратные уравнения, где площади складываются с длинами, а такое сложение никак не может быть осмыслено геометрически.

Но применение геометрического метода решения квадратного уравнения отнюдь не исключает того, что условие задачи предварительно преобразовывалось к однородному виду чисто арифметическим, крайне элементарным путем. А между тем именно в этом и состоит вся «трудность» приводимых Нейгебауером задач. Так, например, в одной из этих задач дано: «Площадь вместе с суммой сторон равна $14\frac{1}{2}$ », а сумма сторон $5\frac{5}{6}$. Найти стороны». Всякому непредубежденному человеку должно быть ясно, что, имея сумму суммы сторон с площадью и отдельно сумму сторон, вавилонянин непосредственно находил площадь:

$$14 - 5\frac{5}{6} = 8\frac{1}{6},$$

после чего уравнение переставало быть неоднородным.

Как вавилоняне находили величины по их сумме и произведению, мы, правда, не знаем. Скорее всего они поступали так же, как мы, т. е. от $x^2 + 2xy + y^2$ отнимали $4xy$ и таким путем находили разность. Но разве для этой процедуры не запрашивается сама собой геометрическая интерпретация?

Далее, Нейгебауер без всякого основания выделяет в вавилонской математике еще особую категорию биквадратных уравнений. В примечании на стр. 213 я указываю, насколько пзтишня такая классификация в применении к отдельной приведенной им задаче; столь же мало можно говорить о «биквадратных уравнениях» в применении к сериям задач, приводимым Нейгебауером ниже, на стр. 214 и сл.

Я готов согласиться с Нейгебауером, что мы имеем здесь дело действительно с задачами, хотя и мыслимо, что это просто математические таблицы, составленные с неизвестной нам целью, причем значения x и y заранее вполне известны. И при толковании Нейгебауера мы имеем ряд уравнений типа

$$m^2x^2 + pxy + n^2y^2 = c,$$

причем значение xy известно. Ясно, что путем прибавления определенной, без труда находимой величины, кратной xy , это уравнение легко привести к виду

$$m^2x^2 \pm 2mnxy + n^2y^2 = c',$$

откуда простым извлечением корня находятся $mx + ny$ и $mx - ny$, а следовательно, x и y . Мы уже видели, что знакомство с этой проце-

¹⁾ В тексте, правда, сказано, что не эта сумма равна 14, а что седьман ее часть равна 2. Но кого это могло затруднить?

дурой необходимо постулировать в Вавилоне и что она могла быть осмыслена чисто геометрически.

Как раз таким же геометрическим путем я осмыслил себе и то, что Нейгебауер называет «решением кубических уравнений у вавилонян».

Однако давать здесь обоснование этих взглядов было бы излишне, так как эта работа уже проделана виднейшими историками математики К. Фогелем в Мюнхене ¹⁾ и Э. Бортолотти в Болонье ²⁾, пришедшими почти к одним и тем же результатам (мы даем здесь в приложении статью Фогеля, а не Бортолотти, так как Фогель лучше знаком со спецификой вавилонской математики; кроме того, националистическая установка Бортолотти — его задача доказать приоритет его отечества в этом вопросе — не может не ослабить убедительности его аргументации).

Как мы увидим из данной в приложении статьи Фогеля, в Вавилоне дело сводилось по существу к построению куба, часто с наложенным на него слоем, высота которого равна единице меры; это дает возможность свести ряд задач к нахождению x по дошедшей до нас таблице значений:

$$x^3 + x^2 = c,$$

которую надо осмысливать как таблицу объемов кубов с наложенным на них слоем толщиной в единицу меры. Нейгебауер в этом случае модернизирует. Однако ознакомление с подлинными текстами показывает, что в ту эпоху, когда написаны интересующие нас документы, вавилоняне уже, не задумываясь, говорили о сложении объемов с поверхностями, т. е. образы, имевшие первоначально геометрический смысл, в математической практике были уже алгебраизированы.

Наконец на стр. 193 читатель убедится, что и в том случае, когда Нейгебауер постулирует у вавилонян умение суммировать сложные ряды, дело может быть сведено к простой геометрической процедуре.

Если, таким образом, достижения вавилонян в области алгебры преувеличены Нейгебауером, то в угоду своей — верной в основе — идее о принципиальной противоположности между египетской и вавилонской математикой он склонен недооценивать уровень математических знаний египтян. Он совершенно неосновательно ставит во главу угла тот факт, что математическое образование было составной частью образования египетского чиновника, и поэтому тематика математических задач обычно теснейшим образом увязана с будущей практикой администратора и счетовода. Знание такой сложной формулы, как формула для объема усеченной пирамиды, имеет предпосылкой серьезную теоретическую работу в области геометрии, и, конечно, греческие ученые ездили в Египет не для того, чтобы узреть несколько эмпирических землемерных формул ³⁾! Нельзя забывать, что из Египта до нас дошло

¹⁾ Kubische Gleichungen bei den Babyloniern? Статья дана в виде приложения ниже, стр. 223.

²⁾ Sulla risoluzione della equazione cubica in Babilonia. Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, серия IX, т. I, стр. 81—94, 1933—1934.

³⁾ См. мою статью, указанную в сноске на стр. 5.

всего два связанных математических текста, не дающих никакого права судить об общем характере египетской математики, тем более, что эти тексты носят узко прикладной характер. «Реконструировать по ним всю математику египтян — такая же ошибка, как если бы мы по двум плохим учебникам коммерческой арифметики стали бы реконструировать современную математику» (М. Я. Выгодский).

В примечаниях к соответствующим местам текста будут еще приведены примеры недооценки Нейгебауером египетской геометрии. Здесь укажу только на то, что, в то время как всему египетскому учению об объемах Нейгебауер посвящает только пять страниц (142—146), он посвящает целых десять страниц текста (ниже, стр. 146—155) доказательству того, что теория В. В. Струве, по которой в задаче М 10 речь идет о поверхности шара, несостоятельна. Этот обширный экскурс (вся книга имеет около 200 страниц), несомненно, неуместен и нарушает стройность изложения; получается впечатление, что Нейгебауер, возражая против теории В. В. Струве, все же инстинктивно чувствует, что эта теория имеет очень многое за себя. Нельзя, например, считать серьезной ссылкой на то, что «такая формула принципиально и резко противоречила бы всему тому, что мы знаем об уровне египетской математики, и данным всего прочего материала источников» (стр. 146). Я не сомневаюсь, что и формулу объема усеченной пирамиды (если бы папирус допускал какую бы то ни было возможность другого толкования) Нейгебауер считал бы несоответствующей уровню египетской геометрии. Эти рассуждения — типичное *petitio principii*: мы, в сущности, ничего не знаем о возможности египетской математики и должны быть готовы ко всяким неожиданностям.

Разумеется, поскольку возможны иные толкования, нельзя считать теорию В. В. Струве уже доказанной. Не будучи специалистом в египтологии, я, конечно, не могу судить, насколько основательны лингвистические возражения, сделанные Струве. Но как филолог я должен заметить, что чтение, обходящееся без конъектур (каково чтение Струве), заслуживает в принципе предпочтения перед другими; если Струве удастся свидетельствами египетских текстов доказать, что предлог *r* употреблялся в смысле «по», «в каждом направлении» и т. д., то я, не задумываясь, предпочту его толкование всякому другому.

С другой стороны, Нейгебауер должен был бы отметить, что и при чтении Пота толкование Струве остается столь же возможным, как и другие (в этом случае речь шла бы о полушаре, т. е. о корзине с кругом в сечении, как о частном случае корзины с эллипсом в сечении, когда длина и ширина сечения не равны обязательно друг другу).

Далее, сам же Нейгебауер иногда приписывает египтянам столь сложные преобразования, что они свидетельствовали бы об очень высоком уровне египетской математики, если бы такие предположения были действительно обоснованы. Так, в своей упомянутой уже статье об египетской геометрии Нейгебауер совсем не делал попытки восстановить аргументацию, приведшую к нахождению объема усеченной пирамиды. Как он справедливо указывал, для правильного нахождения этого объема необходима инфинитезимальная процедура; совершенно невероятно, чтобы такая процедура была известна египтянам. Итак, заме-

чает он, решение получено путем ошибки, а искать, какая это ошибка, — занятие довольно пустое. В. В. Струве в своем издании Московского папируса стал на обратную точку зрения: он приписывал египтянам чисто алгебраическую, по существу, процедуру, известную нам из Герона.

В действительности дело обстоит так: если египтянам был известен объем пирамиды (хотя бы он был получен эмпирическим путем), то для получения объема усеченной пирамиды уже не требовалось никаких инфинитезимальных выкладок; но, с другой стороны, приписывать египтянам знакомство с алгебраическими преобразованиями у нас нет оснований. Исходя из этих соображений, я предложил чисто геометрическую реконструкцию этого решения.

В предлагаемой здесь книге Нейгебауер изменил свой подход: и он прибегает к реконструкции. Эта реконструкция — в основе своей геометрическая; но приводится она к алгебраической формуле

$$\frac{h}{3} (a - b)^2 + hab = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

Непонятно, что выиграл Нейгебауер по сравнению с решением Струве: он сам же заявляет, что всякое восстановление может допускать только преобразования, засвидетельствованные в египетских памятниках. Правда, он ссылается на то, что якобы преобразование $(a - b)^2$ засвидетельствовано в задаче В 1, но это неверно (см. ниже, примечание к стр. 145).

Таким образом, мне кажется, что если уже идти по пути реконструкции решения этой задачи, то и здесь надо ограничиться чисто геометрической реконструкцией, что я и сделал в своей статье. Как бы то ни было, эта задача показывает, что геометрические познания египтян стояли на высоком уровне.

Мы остановились на этих преувеличениях и ошибках Нейгебауера, повторяю, не для того, чтобы дискредитировать его книгу. Цель наших поправок — дать в руки русскому читателю этот оригинальный курс, открывающий совершенно новые горизонты в истории математики, в таком виде, чтобы читатель не мог быть приведен в смущение возможными нападками на нее злобной критики. В самом деле, и помимо этих преувеличений достижения вавилонской математики, с которыми впервые познакомил нас Нейгебауер, в частности далеко зашедшая алгебраизация, в достаточной мере поразительны.

В заключение я хотел бы еще указать на то, что книга Нейгебауера интересна не только для историка математики или историка вообще: она содержит материал, чрезвычайно поучительный и для этнографа и лингвиста, давая ряд новых наблюдений из области первобытной психологии. Особое внимание следует обратить на применение математического (функционального) способа обозначения для характеристики различных языковых типов — этот метод обозначения, несомненно, раньше или позже получит право гражданства и в официальной лингвистике — и на графический способ, применяемый с эвристическими целями для дополнения историко-научных документов.

С. Лурье.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

История античной математики зиждется на двух основаниях, хронологически далеко отстоящих друг от друга: с одной стороны, это произведения классической греческой математики — труды Евклида, Архимеда и Аполлония, относящиеся к IV и III векам до н. э., с другой — египетские и вавилонские тексты, которые, по крайней мере в преобладающем большинстве, более чем на тысячелетие древнее первых. Если мы хотим дать последовательную картину истории возникновения античной математической мысли, то необходимо отправляться от этих двух более или менее прочно установленных опорных пунктов. Тогда прежде всего приходится искать ответ на две группы вопросов. Первая касается тех исторических предпосылок, которые обусловили возникновение древневавилонской математики; вторая имеет целью реконструкцию путей возникновения собственно греческой математики, для восстановления которых не существует почти никаких прямых источников, т. е. ставит себе задачей перебросить мост между греческой и догреческой математикой.

Цель этих лекций — дать краткий эскиз, обрисовывающий обе эти группы проблем, ответить на вопросы, из них вытекающие, и познакомить читателя с теми методами и вспомогательными средствами, которыми мы в данный момент располагаем для хотя бы частичного разрешения интересующих нас задач.

Я отнюдь не собираюсь дать такую картину наших нынешних знаний о математическом развитии античного мира, которую можно было бы в том или ином смысле считать законченной. То, что предлагается здесь вниманию читателя, — на самом деле л е к ц и и, переданные почти точно в том виде, в каком я их читал в Копенгагене. Лекция по самой своей сущности требует, чтобы докладчик занял определенную позицию по отношению к отдельным частным вопросам. Я вовсе не пытался уклониться от этой обязанности; напротив, я пытался в максимально краткой и выпуклой форме обрисовать положение вещей, выявляющееся на основе наличного материала, содержащегося в источниках, и сделать все те выводы, которые, по моему мнению, отсюда вытекают. Таким образом мой подход к теме, предлагающий печать на всю книгу, насквозь субъективен и основан на моих личных воззрениях.

Весь труд разделен на три тома. Предлагаемый здесь читателю первый том посвящен исключительно восточной математике. Вторым том будет посвящен греческой математике; как уже было сказано выше, его исходным пунктом будет тот материал источников, который один только и дошел до нас полностью, т. е. прежде всего Аполлоний

и Архимед; исходя из этого материала, мы будем пытаться проникнуть в предисторию греческой математики. Третий том будет посвящен точной астрономии, т. е. прежде всего основному и до сих пор недостаточно оцененному труду Птолемея, с одной стороны, и вавилонской астрономии, — с другой. Эта астрономия — сравнительно позднего происхождения и на нынешней стадии ее изучения значительно труднее и недоступнее, чем работа Птолемея.

В заключение я надеюсь дать нечто вроде общего обзора античных математических наук. Еще раз необходимо подчеркнуть, что моей единственной целью является — как можно отчетливее обрисовать те проблемы, которые при этом возникают, и указать на существующие между ними связи. Однако никак не следует пользоваться этими лекциями как компендиумом всего того, что содержится в доступных нам источниках. Кто хочет надлежащим образом заняться отдельными вопросами, не сможет обойтись без самостоятельного изучения источников в подлинниках. Публикуемые здесь лекции имеют целью лишь попытаться показать широкому кругу читателей, к каким выводам можно прийти в результате работы над дошедшими до нас остатками античной математической литературы и каковы предпосылки этой работы.

Попытка дать связную картину истории догреческой математики делается здесь в первый раз. Вряд ли кто-либо чувствует острее, чем я сам, как велики проблемы в том материале, на котором приходится строить такую реконструкцию. Одновременно с этими лекциями выйдет из печати издание всех известных мне математических клинописных текстов; в этом издании я пытаюсь по мере возможности сделать доступным во всех его подробностях весь наличный материал текстов, не прибегая ни к каким историческим конструкциям. Всякого, кто хотел бы проверить или дополнить даваемую нами в настоящих лекциях картину, мы отсылаем к этому изданию. Само собой разумеется, у того широкого круга читателей, для которого эта книга предназначена, знакомство с этим материалом не предполагается. Изучение догреческой математики основано на исследованиях самого последнего времени; поэтому надо ожидать, что уже в ближайшее время в наше изложение придется внести ряд дополнений и исправлений. Однако основная цель этих лекций — побудить читателя подумать над разбираемыми здесь вопросами. Если он придет к иным выводам, более правильным, чем те, которые сформулированы здесь, то я буду гораздо более удовлетворен, чем в том случае, если бы мне удалось так затуманить все спорные вопросы, чтобы ошибки в моих выводах остались незамеченными.

Мне крайне неприятно, что открытие вавилонской математики с неизбежностью приводит к более ранней датировке открытия ряда математических теорем и зависимостей. Впрочем, я полагаю, что читатель, интересующийся преимущественно вопросами приоритета, найдет мало интересного в этих лекциях. Время служит системой координат для истории — это неизбежно, но этим и исчерпывается роль времени для истории. Кроме того, наши познания из области догреческой математики еще далеко не столь глубоки, чтобы можно было дать хро-

нологически законченную картину ее истории. Однако, если бы даже материал наших текстов и содержал во много раз меньше хронологических проблем, я считал бы хронологическое изложение истории догреческой математики принципиальной ошибкой. В самом деле, в то время как история античной мысли разыгрывается на фоне эллинизма, история догреческой эпохи в основных чертах обусловлена дуализмом культуры Египта, с одной стороны, и культуры народов Месопотамии — с другой. Поэтому при изучении догреческой математики все внимание должно быть обращено на возможность двоякого выражения одного и того же процесса. Эта двойственность, это наличие двух одновременных процессов развития, вполне аналогичных во всей постановке выдвигаемых вопросов, но приведших тем не менее к совершенно различным результатам, является для нас столь единственным в своем роде даром судьбы, что мы лишили бы себя самого полезного орудия более глубокого понимания вопроса, если бы в угоду тому или иному «систематическому» изложению отказались от постоянного сопоставления и сравнения египетского и вавилонского материалов. Этим подходом обусловлено и расположение материала в наших лекциях, о чем будет еще вкратце сказано во введении к книге.

О. Нейгебауер.

Предисловие переводчика	5
Предисловие автора	13
Введение	18

Глава I.

Вавилонская вычислительная техника.

§ 1. Таблицы обратных значений	20
а) Предварительные замечания	—
б) Способ расположения чисел и терминология в таблицах обратных значений	23
в) Способ составления таблиц обратных значений	26
г) Добавление. Обобщенные таблицы обратных значений	32
§ 2. Другие таблицы и вавилонская вычислительная техника вообще	32
а) Сложение и вычитание	—
б) Умножение и деление	35
в) Отдельные замечания к системе таблиц умножения	46
1. Принцип выбора основных чисел	—
2. Дополнение текстов таблиц	47
г) Другие таблицы	49
д) Вычисление иррациональных квадратных корней	50
е) Заключительное замечание	55
Список литературы к главе I	56

Глава II.

Общая история. Язык и письмо.

§ 1. Хронологический и географический обзор	57
§ 2. Принцип клинописи	66
а) Техника письма	—
б) Система письма в клинописных текстах	69
в) Языки клинописных текстов	77
г) Математическая терминология	83
§ 3. Египетское письмо	87
Список литературы к главе II	94

Глава III.

Система счисления.

§ 1. Сущность вопроса	96
§ 2. Целые числа	98
§ 3. Дроби	101
§ 4. Шестидесятеричная система	109
а) Фактический материал. Постановка вопроса	110
б) Система мер	116
в) История возникновения шестидесятеричной позиционной системы	120
Список литературы к главе III	125

Глава IV.

Египетская математика.

Стр.

§ 1. Тип египетской математики	126
а) Источники	—
б) Общая характеристика математических текстов	—
§ 2. Египетская геометрия	138
а) Планиметрические задачи	—
б) Объемы	142
в) М 10	146
§ 3. Египетская теория дробей	155
а) Алгоритм вспомогательных чисел	—
б) Структура таблицы величин $\frac{2}{n}$	165
Список литературы к главе IV	184

Глава V.

Вавилонская математика.

§ 1. Геометрия	186
§ 2. Из области арифметики	191
§ 3. Алгебра	196
а) Система линейных уравнений	—
1. Разложение треугольника (5 неизвестных)	—
2. Разложение треугольника (10 неизвестных)	202
3. Два неизвестных	203
б) Квадратные уравнения	206
1. Разложение треугольника	—
2. Другие разложения треугольника на части	208
3. Неоднородные уравнения	—
4. Квадратные уравнения для обратных значений	209
5. Серии задач на квадратные уравнения	211
в) Биквадратные уравнения	212
1. Биквадратные уравнения для «длины» и «ширины»	—
2. Серии биквадратных уравнений	214
3. Другие задачи на биквадратные уравнения	216
§ 4. «Трансцендентные» задачи	217
1. Кубическое уравнение	—
2. Простые и сложные проценты	221
3. Таблицы и их терминология	223
§ 5. Общий обзор и положение вопроса в настоящее время	226
Список литературы к главе V	232
К. Фогель, Кубические уравнения у вавилонян	233
Предметный указатель	240

ВВЕДЕНИЕ.

Если мы хотим более ясно представить себе механизм догреческой математики, то нам необходимо прежде всего понять внешний аппарат этой математики, т. е. ее вычислительную технику. Характерной чертой всей догреческой математики является то, что во всех доступных нам текстах она представлена не в виде общих формул или геометрических доказательств в стиле Евклида, а исключительно в виде ряда отдельных примеров на действия с числами. Поэтому уже по причинам внешнего характера необходимо заняться вавилонской и египетской вычислительной техникой: не зная ее, совершенно невозможно провести грань между методами решения задачи по существу и выполнением решения в числах. Но сверх того более тщательное изучение догреческой математики показывает, что между египетской и вавилонской математикой существовали глубокие различия, о б у с л о в л е н н ы е в своих основных чертах большей или меньшей степенью овладения чисто числовыми процессами.

Одна из важнейших задач этих лекций — показать, что основной п р е д п о с ы л к о й для более высокого уровня вавилонской математики было полное овладение всеми проблемами числового характера; и, наоборот, то состояние, в котором находилась египетская математика, было обусловлено тем своеобразным направлением, которым шла египетская вычислительная техника в противоположность вавилонской. Поэтому изучение своеобразной вычислительной техники догреческой математики так же важно для понимания этой математики, как знакомство со своеобразной «геометрической алгеброй» для понимания, скажем, методов интегрирования Архимеда или греческой теории конических сечений. Поэтому, начиная нашу работу с освоения методов действий над числами, мы изучаем действительно основы догреческой математики.

В то время как материал первоисточников египетской математики весьма скуден, для вавилонской математики нам известно до сих пор приблизительно 200 «табличных текстов», очевидно, имеющих целью облегчить практические вычисления. Поэтому мы в наших лекциях прежде всего будем отталкиваться от того внешнего факта, что нам известно сравнительно большое число таких текстов; эти тексты мы будем классифицировать с точки зрения их практического назначения. Таким путем мы сможем охарактеризовать общими чертами ту основу, на которой покоилась вавилонская математика. Но уже в первой главе нам станет ясно, что значение текстов этого типа не исчерпывается понятием «вспомогательные орудия для вычислений». Мы увидим, что даже на этих простых текстах еще не стерлись следы весьма сложного исторического развития; это ставит перед нами задачу попытаться восстановить в основных чертах эту предисторию. Для этого придется

подвергнуть изучению всю историю развития вавилонской системы счета и чисел. Выяснится, что для этого совершенно необходимо остановиться на истории возникновения языка математических знаков в сфере месопотамской культуры; а этот вопрос в свою очередь теснейшим образом связан с историей возникновения важнейшего для этой культуры средства общения — клинописи. Лишь после более подробного рассмотрения этого круга вопросов можно будет перейти к истории вавилонской системы счисления в более узком смысле.

Эта система счета, как известно, имеет совершенно особенное значение: это — по крайней мере в основных частях — «позиционная система», как и наша, только основанная на 60, а не на 10. Поэтому она самым резким образом отличается от всех других способов выражения чисел в древности. Несмотря на это, мы убедимся в том, что и египетская система счисления на первых порах тесно связана с теми наглядными представлениями, из которых развилась и шестидесятеричная система. Далее, подобно тому, как вся вавилонская математика получила свой типичный облик благодаря ее удивительно удобной вычислительной технике, и египетская математика находилась под сильнейшим влиянием строения ее системы чисел и связанной с этой системой вычислительной техники. Поэтому первые четыре главы этих лекций, несмотря на все внешние различия разбираемого в них материала, тесно связаны между собой, поскольку все они посвящены вопросу об историческом генезисе догреческих систем счисления и их использовании в математике. На долю последней, пятой, главы остается изобразить в самых общих чертах, какой характер имеет вавилонская математика, покоящаяся на этой основе.

Самый важный результат привлечения этих новых математических текстов, как я полагаю, надо видеть в следующем: они показали, что наряду с давно уже известной египетской математикой с ее характерной примитивностью и наряду с тончайшим логическим анализом тщательно отделанной греческой математики в сфере средиземноморских культур существовал еще третий тип образования математических понятий: это — алгебраический тип вавилонской математики. Хотя в настоящее время получается впечатление, что эта область существует как нечто совершенно замкнутое в себе, мы тем не менее убедимся, что и эта вавилонская алгебра имеет тесные исторические связи с теми стадиями развития, которые обусловили формирование математических таблиц. Мы покажем таким образом, что, констатируя алгебраический характер вавилонской математики, мы не даем еще достаточно отчетливой картины этой математики: только полное взаимопроникновение алгебраического способа выражения и вычислительной техники дают действительно верное представление об этом процессе. Мы убедимся, что именно такой подход приводит нас к постановке ряда новых проблем, причем на эти вопросы мы в ряде частностей еще вовсе не в состоянии дать сколько-нибудь удовлетворительного ответа. Эти вопросы не только помогают нам выяснить отличие от греческой математики отчетливее, чем это было возможно до сих пор; исходя из выдвинутых нами проблем, можно будет перекинуть мост к характерным методам античной вычислительной астрономии.

ВАВИЛОНСКАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА.

§ 1. ТАБЛИЦЫ ОБРАТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

а) Предварительные замечания.

Говоря в этой книге о «вавилонских» математических текстах, мы имеем в виду глиняные таблички с надписями математического содержания, начертанными клинописными знаками. Из известных нам текстов такого рода древнейшие восходят примерно к 2000 г. до н. э., тогда как позднейшие относятся к позднему эллинизму (приблизительно 200 г. до н. э.). С чисто внешней стороны они распадаются на две большие группы: «таблицы» и «собственно математические тексты».

Первая группа содержит ряды чисел, составленных и расположенных по определенному закону; так, например, нам на ближайших страницах придется иметь дело с таблицами обратных значений, кратных чисел и т. д. Ко второй группе относятся математические задачи, о которых мы будем говорить подробно в последней главе.

Вавилонская система цифр основана на двух основных элементах: на простом «клине» ∇

с числовым значением 1 и «угловатом крючке» $\angle$ ¹⁾ с числовым значением 10. Повторение этих знаков дает, с одной стороны, еди-

ницы от 1 до 9 и, с другой — десятки от 10 до 50. Эти числовые знаки читаются, как и клинопись вообще, слева направо. Помещение знаков рядом друг с другом означает сложение, например $\angle\angle\angle$ означает 33. Десятки стоят всегда слева от единиц. Правда, отдельные клинья и угловатые крючки могут быть слиты в более тесные группы (рис. 1; дальнейшие примеры легко найти на рис. 12, стр. 51, рис. 56, стр. 197 и рис. 64, стр. 209).

Этим способом изображаются числа от 1 до 59; затем те же числовые знаки появляются еще раз, но их числовое значение в 60 раз больше, т. е. мы имеем нечто вроде позиционной системы с основанием 60.

¹⁾ Мы всюду будем переводить немецкое слово *Winkelhaken* русским «угловатый крючок» ввиду отсутствия более подходящего термина в русском языке.
Переводчик.

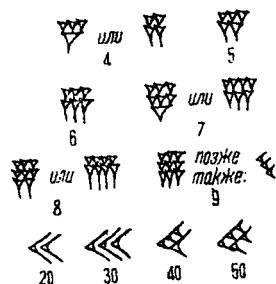


Рис. 1.

Мы передаем 𐎶𐎵 через 1,4 или 𐎶𐎵𐎶𐎵 через 1,21. Таким образом 1,4 имеет значение 64 и соответственно 1,21 — значение 81.

Однако характерной особенностью этой позиционной системы является то, что ей чужда позиция в абсолютном смысле: к каждому числовому знаку в принципе может быть придана в качестве подразаумываемого множителя любая положительная или отрицательная степень 60, причем этот множитель не находит никакого внешнего выражения в написании числа. $\lll$ «30», можно читать и как 30 и

как $30 \cdot 60 = 1800$ и т. д., но в то же время и как $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ или $\frac{30}{60^2} = \frac{1}{120}$ и т. д. Равным образом и 𐎶 есть не только 1, но и вообще $60^{\pm k}$.

Два числа a и b , которые различаются только множителем, представляющим (положительную или отрицательную) степень 60, мы будем называть «*конгруэнтными* по множителю 60», применяя обозначение $a \equiv b$ (мн. 60). Такие конгруэнтные числа ничем не отличаются друг от друга в их клинописном начертании.

Только связь между числами, вытекающая из существа математического расчета, дает нам возможность решить, какое позиционное значение следует приписать отдельным числовым знакам. В дальнейшем для выражения этого взаимоотношения я буду целые части отделять от шестидесятеричных дробей точкой с запятой, например я буду писать 0;30 в том случае, когда $\lll$ означает $\frac{1}{2}$, а 1,0 будет обозначать 60. Иными словами: точку с запятой я употребляю в том случае, когда мы в десятичном исчислении употребляем запятую, а запятую я буду употреблять только для внешнего отделения друг от друга отдельных шестидесятеричных разрядов. Знак нуль в начале или в конце числовых выражений не известен вавилонской математике, так что точка с запятой или разряд, отмеченный нулем в начале или в конце числового выражения, представляет собой уже осложнение вавилонского изображения числа нашей интерпретацией.

Однако — по крайней мере в более позднее время — существовал уже знак для недостающих шестидесятеричных разрядов внутри числа. Таким знаком служил 𐎶 , знак отделения, так что моему обо-

значению 1,0,4 соответствует вавилонское 𐎶𐎶𐎵 . Но отсюда не видно, следует ли толковать это число, как 1,0,4, т. е. как 3604, или, например, как 1,0;4, т. е. как $60\frac{1}{15}$. Древнейший из известных мне текстов, применяющий этот символ, относится, повидимому, к персидскому времени. В более древних текстах мы встречаем написания вроде 𐎶𐎶𐎶 в смысле 6,0,9 без какого бы то ни было особого знака, который давал бы возможность отличить 6,0,9 от 6,9. Помощью в расшифровке может служить только общий ход рассуждения в тексте ¹⁾.

¹⁾ Расстояние отдельных числовых знаков друг от друга, как правило, не имеет решительно никакого значения; например в текстах таблиц с многознач-

В дальнейшем изложении при транскрипции чисел, написанных клинописью, мы будем их писать указанным выше способом, не переводя в десятичный вид. Чрезвычайно важно уже с самого начала привыкнуть к вычислениям с помощью таких шестидесятеричных чисел: только при этом условии можно понять, какую роль играл в вавилонской математике этот способ обозначения. Стоит перейти к десятичному представлению чисел и сразу же пропадает ряд важных приемов, облегчающих вычисление, так как основание 60 имеет очень большое число делителей, и этот факт имеет решающее значение в вычислительной практике. Но и помимо этого во всякой исторической работе чрезвычайно важно при всякого рода выводах держаться как можно ближе к способу выражения оригинала. Только в этом случае мы можем надеяться, что нам удастся взглянуть в дух подлинника, что мы не будем постоянно применять способы рассуждения, выпадающие из рамок вавилонской математики, и, с другой стороны, что мы не пропустим ничего, непосредственно вытекающего из вавилонской системы обозначений. В самом деле, причиной неудачи первых попыток понять математические клинописные тексты было прежде всего то, что считали необходимым неопределенные текущие шестидесятеричные позиции перевести в десятичные числа, имеющие абсолютный смысл; в результате вычисления превращались в сплошную бессмыслицу (это и было причиной того, что эти вычисления получили название «ученических упражнений»).

Кроме того, мы считаем необходимым ввести еще следующие термины: пусть a — целое число; в этом случае очевидно, что для того, чтобы $\frac{1}{a}$ могло быть представлено как копечная шестидесятеричная дробь, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$a = 2^a 3^b 5^c.$$

Все числа этого вида мы будем впредь называть *правильными*, а все прочие — *неправильными*. Вместо $\frac{1}{a}$, обратного значения числа a , мы будем впредь по большей части писать $\bar{a}$. Черта над буквой имеет во всей книге именно такое значение.

ными числами числовые знаки стоят в некоторых строках на очень больших расстояниях друг от друга. Так, например, расположение цифр вроде такого:

52 40 29 37 46 60

52 5

51 50 24

не означает ни в коем случае, что между отдельными числовыми знаками находятся недостающие разряды. Чисто графически можно зато почти всегда безошибочно отличить 14 от 10,4, так как десятки по большей части примыкают вплотную к относящимся к ним единицам: $\overline{\text{XIV}} = 14$, тогда как $\overline{\text{XIV}} = 10,4 = 60\frac{1}{4}$.

б) Способ расположения чисел и терминология в таблицах обратных значений.

До нас дошло большое количество таблиц, в которых на соответственных местах параллельных столбцов стоят в одном целые числа n , в другом — шестидесятеричные дроби для $\frac{1}{n} = \bar{n}$, примерно по такой схеме:

2 30

3 20

4 15

...

Разумеется, позиционное значение этих чисел никогда не фиксировано абсолютно, так что само по себе совершенно произвольно считать числа левого столбца целыми числами (как поступили мы), а числа правого столбца — выражением их обратных значений по шестидесятеричной системе. Мы могли бы с равным правом считать целыми числа правого столбца. Единственное, что можно сказать без дальнейших данных — это то, что произведение соответственных чисел обоих столбцов всегда равно 60 (или — с таким же правом — мы могли бы сказать: некоторой степени от 60). Итак, таблица обратных значений — это просто таблица чисел n и $\bar{n}$, удовлетворяющих соотношению $n\bar{n} = 1$ (мн. 60). С какой целью составлены такие таблицы, можно непосредственно заключить из того способа вычисления, который применяется в собственно математических текстах. Чтобы разделить b на a , в этих текстах всегда умножают b на $\bar{a}$, т. е. на величину, обратную a . Очевидно, это $\bar{a}$ заимствуется из соответственной таблицы обратных значений.

Все сказанное дает в основном представление о пользовании таблицей обратных значений. Однако в текстах заключается ряд частности, возбуждающих много вопросов. Самый животрепещущий вопрос состоит, конечно, в том, как поступали в случае неправильного делителя a , для которого не может существовать никакого конечного выражения $\bar{a}$ в шестидесятеричных дробях. Сохранившиеся до нашего времени таблицы делятся в отношении этих неправильных чисел на две группы. Одна группа, представленная большей частью памятник (тип А), вовсе опускает неправильные числа, как, например,

igi 5 gál-bi 12

igi 6 gál-bi 10

igi 8 gál-bi 7,30

igi 9 gál-bi 6,40

igi 10 gál-bi 6

igi 12 gál-bi 5 и т. д.

(igi... gál-bi или в других случаях просто igi есть обычный terminus technicus ¹⁾ для обозначения обратных значений; происхождение этого термина еще далеко не выяснено; кстати, мы имеем здесь первый и очень типический пример того, что о смысле математических терминов необходимо прежде всего умозаключать из их чисто математического применения, не обращая внимания на их первоначальное чисто языковое значение). Итак, в этих таблицах значения $n = 7$ и $n = 11$ просто выпущены. Другая группа таблиц, как мне кажется, более древняя («тип В»), дает и неправильные числа, но делает в этом случае специальную оговорку, например

7 igi nu,

где nu — обычная отрицательная частица, так что в свободном переводе это будет означать: «на 7 нельзя делить» и т. п. Итак, мы видим: вавилонянам было хорошо известно, что неправильные числа носят характер исключения. Но эти таблицы не дают нам ответа на поставленный выше вопрос о процедуре при делении на неправильные числа — исчерпывающего ответа на этот вопрос мы пока действительно дать не в состоянии. Правда, в математических текстах встречаются нередко деления вида $\frac{b}{a}$, где a — неправильное число, т. е. содержит простые множители, отличные от 2, 3 и 5. Однако во всех этих случаях те же простые множители содержатся и в числителе b , так что $\frac{b}{a} = c$ может быть представлено в виде конечной шестидесятеричной дроби. Формулировка текста в этих случаях всегда примерно такая: «На что надо помножить a , чтобы получить b ? Помножь на c ». Но откуда взято это c в более сложных случаях, из известного нам до сих пор материала не видно.

Теперь перейдем к рассмотрению начальных строк таблиц обратных значений. Существует много различных типов этих таблиц, из которых я привожу здесь три наиболее характерные:

1-da $\frac{2}{3}$ -bi	40-àm	1 $\frac{2}{3}$ -bi	40-àm	1	40-àm
šu-ri-a-bi	30-àm	šu-ri-a-bi	30-àm	2	30-àm
igi 3	20	3	20	3	20
igi 4	15	4	15	4	15
и т. д.		и т. д.		и т. д.	

Общей особенностью всех этих типов является то, что в них две первые строки построены иначе, чем следующие. Начиная с третьей

¹⁾ Ударение и значки, применяемые при транскрипции клинописных знаков, не соответствуют никаким оттенкам в произношении, но служат только для отличия различных написаний одного и того же звука (при этом применяется некоторая определенная условная схема). Черточки поставлены между каждыми двумя клинописными знаками. Подробнее об этом в гл. II, особенно стр. 73 и сл. Оттенки произношения выражают только следующие знаки: δ (= u), h (= x), знак долготы $\hat{}$; $\$$ и $\dagger$ суть эмфатические (сильно ударяемые) звуки.

строки, перед нами просто описанные выше таблицы n и $\bar{n}$ (разница в начальных строках между типами А и В не имеет значения). В двух первых примерах во второй строке содержится числительное šu-gi-a-bi , т. е. «половина его», а в графе обратных значений соответственно дапо «30-ām», т. е. «тридцать это». Первая строка первого примера в переводе означает: «от 1 его $\frac{2}{3}$ 40 это». Во втором примере это выражение получило уже вид: «1 его $\frac{2}{3}$ 40 это». В последнем примере читается даже: «1 40 это» — выражение, которое вообще становится понятным только в том случае, если мы знаем предшествующую историю; если бы мы исходили только из общей схемы, принятой в этом третьем примере, то мы должны были бы, принимая в соображение последующие строки, понимать и эту первую строку в смысле «обратная величина для 1 есть 40», что представляет собой явную нелепость. Из этого примера видно особенно отчетливо, как из первоначально более полных формулировок, стираясь, возникают условные обозначения, сами по себе уже вовсе непонятные. Однако чрезвычайно важно обратить внимание на то, с каким постоянством еще в этих поздних примерах две первые строки таблиц обратных величин подвергаются особой трактовке точно так же, как мы это наблюдали на первом примере.

На факте такого своеобразия двух первых строк необходимо специально остановиться. С чисто формальной точки зрения таблица обратных значений должна была бы начинаться либо с пар чисел

1 1

2 30

либо сразу с

2 30

Вместо этого в таблице находим $\frac{2}{3}$ — единственную содержащуюся здесь дробь, которую нельзя понимать как $\frac{1}{n}$. Более того: эта дробь

$\frac{2}{3}$ обозначена в таблице специальным знаком , так что эта

первая строка   в сущности представляет собою только

транскрипцию этого специального числового знака на язык общепринятых описанных выше позиционных числовых знаков. Ниже мы остановимся подробнее на этом вопросе. Равным образом и сопряжение 2 30 дано особым образом, отличным от способа, примененного в следующих за этой строках: в двух данных выше примерах это достигается применением написанного буквенными знаками слова «половина». В этих двух строках дано еще абсолютное значение $\frac{2}{3}$ и е, а не обратная величина чисел, именно: $\frac{2}{3} = 0;40$ и «половина» =

$= 0;30$. Только начиная с третьей строки, и справа и слева находим общепринятые числовые знаки. Ясно, что наше определение таблицы обратных значений как последовательного ряда правильных чисел вида $n\bar{n} \equiv 1$ (мн. 60), правда, точно соответствует математическому употреблению этих таблиц в собственно математических

текстах, но тем не менее слишком узко, если мы интересуемся и следами исторического развития, особенно резко заметными в самой по себе бессмысленной формулировке первой строки «1 40».

в) Способ составления таблиц обратных значений.

Зная какую-либо пару взаимно обратных чисел, например 2 и 30, нетрудно уже вывести из нее и все другие пары правильных взаимно обратных чисел: для этого достаточно лишь одно из чисел по какому-нибудь исчерпывающему принципу последовательно умножать на 2, 3 и 5, а другое соответственно делить так, чтобы произведение все время оставалось равным 60.

Большинство известных таблиц обратных значений имеет размер следующей «нормальной таблицы»:

2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

Эта таблица, как можно видеть, содержит в левом столбце все однозначные (по шестидесятеричной системе) правильные числа от 1 до 1,0, а затем еще двузначные числа 1,4, 1,12, 1,15, 1,20, 1,21. Шестидесятеричная значимость чисел правой стороны, разумеется, может быть меньшей, равной или большей, чем значимость соответствующих чисел левой стороны; она уже не зависит от составителя таблицы. Нетрудно представить себе, как составить такую таблицу, руководствуясь данным выше правилом.

Однако такие нормальные таблицы — не единственные, сохранившиеся до нашего времени. Интересным образцом является, например, следующая таблица:

2,5	28,48	4,26,40	13,30
4,10	14,24	8,53,20	6,45
8,20	7,12	17,46,40	3,22,30
16,40	3,36	35,33,20	1,41,15
33,20	1,48	1,11, 6,40	50,37,30
1, 6,40	54	2,22,13,20	25,18,45
2,13,20	27		

Легко заметить закономерность этой таблицы. 2,5 это 5^3 , 4,10 это $2 \cdot 5^3$ и, наконец, $2,22,13,20 = 2^{12} \cdot 5^3$. Таким образом числа n на левой стороне этой таблицы имеют вид $2^a 3^b 5^3$ от $a = 0$ до $a = 12$. Здесь перед нами непосредственный образец получения одной из частей таблицы обратных значений; при систематическом продолжении этой таблицы (и соответственно при распространении ее на 3 и 5) неизбежно должны получиться все возможные пары правильных обратных значений.

Один дошедший до нас клинописный документ эпохи Селевкидов (т. е. примерно III в. до н. э.) представляет собой очень длинный текст, содержащий ряд таблиц обратных значений; эти обратные значения даны вплоть до шестизначных чисел n с первой цифрой 1 или 2. В тексте прямо сказано, что за этими таблицами следовала еще одна таблица, начинающаяся с 3. Соответствующие этим n значения n часто очень велики: многие из них имеют до 17 шестидесятеричных знаков. В качестве образца приведем первые 11 чисел этого текста ¹⁾:

¹ igi	1	gál-bi	1	àm
² igi	1, ., 16,53,53,20	.	59,43,10,50,52,48	
³ igi	1, ., 40,53,20	.	59,19,34,13, 7,30	
⁴ igi	1, ., 45	.	59,15,33,20	
⁵ igi	1,1, 2, 6,33,45	.	58,58,56,38,24	
⁶ igi	1,1,26,24	.	58,35,37,30	
⁷ igi	1,1,30,33,45	.	58,31,39,35,18,31, 6,40	
⁸ igi	1,1,43,42,13,20	.	58,19,12	
⁹ igi	1,2,12,28,48	.	57,52,13,20	
¹⁰ igi	1,2,30	.	57,36	
¹¹ igi	1,3,12,35,33,20	.	56,57,11,15	

В этом тексте интересно не только то обстоятельство, что он показывает нам, как велики были достижения вавилонской математики в составлении таблиц; еще интереснее то, что в своей шестизначной части эта таблица оказывается неполной. Так, например, между строками 8 и 9 или соответственно 10 и 11 можно было бы вставить

1,2,8,16,12,48 57,56,8,34,22,47,34,41,15

и

1,2,59,8,9,36 57,9,21,19,0,44,26,40

¹⁾ В приведенном здесь примере исправлены небольшие повреждения и описки. Интересующиеся деталями отосылю к моему изданию «Математических клинописных текстов» (MKT), Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. A, 3, гл. I, § 2 (см. список литературы в конце главы, стр. 56). Числа, стоящие перед igi, прибавлены мною для нумерации строк; их нет в тексте. Одна точка представляет собой знак отделения. Во второй, третьей и четвертой строках точка имеет значение нуля (см. выше, стр. 24).

Отсюда возникает следующий вопрос: каков же был принцип выбора при внесении в таблицу одних и исключении других чисел? Если бы мы могли удовлетворительно ответить на этот вопрос, то это дало бы нам возможность приблизиться к решению вопроса о способе составления этой таблицы.

Прежде чем приступить к обсуждению этого вопроса, я считаю необходимым вкратце описать в самых общих чертах процедуру, которая оказывается полезной для нас, когда мы хотим обнаружить какие-либо закономерности между правильными числами. Практический опыт очень скоро приводит нас к выводу, что даже при не очень больших числах, как только мы пытаемся установить какую-нибудь закономерную связь между этими числами, мы тотчас же погружаемся в безбрежное море вычислений. Такие проблемы возникают особенно часто в тех случаях, когда мы имеем дело с отрывками текстов, самый характер и взаимная связь которых не может быть определена непосредственно, или когда приходится изучать особенно большие множества чисел, как, например, в упомянутой выше таблице (она содержит 138 пар mn).

Метод, который я хочу здесь вкратце очертить, основан на том, что всякое правильное число, согласно самому его определению, определяется тремя параметрами α , β , γ , поскольку оно должно при разложении на простые числа иметь вид $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$. Если мы хотим дать наглядное, стало быть, геометрическое изображение этого числа, то необходимо установить соответствие между любой тройкой α , β , γ и определенной точкой. Сам по себе этот метод, повидимому, ничего не дает, так как пространственные построения, вообще говоря, не являются удобным методом изображения. Но на помощь нам приходит одна особенность вавилонской системы написания цифр: неопределенность позиции. Число a в клинописной системе нельзя отличить от числа $a \cdot 60^k$. Если мы хотим дать толкование, которое было бы адекватно тексту, то необходимо, чтобы в нем не было разницы между

$$2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \quad \text{и} \quad 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \cdot 60^{\pm k} = 2^{\alpha \pm 2k} 3^{\beta \pm k} 5^{\gamma \pm k}.$$

В этом и только в этом случае восстановленная нами картина будет обладать надлежащей неопределенностью относительно позиционного значения выраженных знаками чисел.

Такое выражение можно легко осуществить на плоскости следующим образом. Мы покрываем плоскость сеткой из правильных треугольников, любую точку на этой сетке принимаем за начало координат, а три выходящие из этой точки направления, образующие друг с другом углы в 120° , — за положительные направления осей α , β и γ . За единицу масштаба мы берем на осях β и γ один стежок, а на оси α — половину этого стежка (рис. 2). Каждому правильному числу $a = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ соответствует при таких допущениях либо узловая точка сетки, либо середина стороны треугольника, параллельной оси α . Это точечное множество составляется из узловых точек сетки треугольников; по к этим точкам прибавлены еще все те точки, которые

получаются из них путем перемещения их на одну единицу в направлении α . Это множество мы для краткости называем множеством «целых точек» нашей схемы. Целые точки представляют совокупность всех правильных чисел, притом так, что два числа, конгруэнтные по множителю 60, выражаются одной и той же целой точкой. В этом можно легко убедиться следующим путем. Так как умножение двух правильных чисел $a_1 = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$ и $a_2 = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$ может быть выражено через сложение показателей, то на нашей схеме умножение будет не чем иным, как сложением векторов, соответствующих этим показателям. Так, в частности, умножение $a = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma}$ на $60 = 2^2 3^1 5^1$ означает, что мы от точки $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ на схеме сперва откладываем две единицы в направлении α , а затем по одной единице в направлениях β и γ . Но ввиду принятых нами выше условий относительно выбора масштаба это означает, что такое умножение на 60 равнозначает полному обходу равностороннего треугольника со стороной, равной сетке, т. е. оно приводит нас из A назад в A . Mutatis mutandis это рассуждение, очевидно, применимо и к умножению на любую степень 60, так как такое умножение выражается несколькими полными обходами равностороннего треугольника. Значит, и в самом деле конгруэнтным числам соответствует только одна точка, и обратно.

Применяя такой способ выражения, мы можем выполнять все расчеты с таблицами обратных значений крайне просто. Начало координат этой системы является изображением числа 1 или соответственно всех степеней 60. Числом, обратным числу $a = (\alpha, \beta, \gamma)$, будет такое число $\bar{a}$, для которого выполняется соотношение

$$a\bar{a} \equiv 1 (\text{мн. } 60);$$

следовательно, система показателей α', β', γ' числа $\bar{a}$ должна удовлетворять соотношению

$$(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha', \beta', \gamma') = (0, 0, 0)$$

и, значит, $\bar{a}$ будет выражаться просто через $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Таким образом построение обратного значения на нашей схеме сводится к нахождению зеркального отображения относительно начала координат.

Если приходится много работать с математическими клинописными текстами, то необходимо иметь полную таблицу обратных значений — таблицу сравнительно большого размера. Путем объясненной выше процедуры последовательного деления или соответственно умножения на 2, 3 и 5 она может быть без труда вычислена вся. Если при каждом шаге отмечать число выполненных умножений на 2, 3 или 5, то

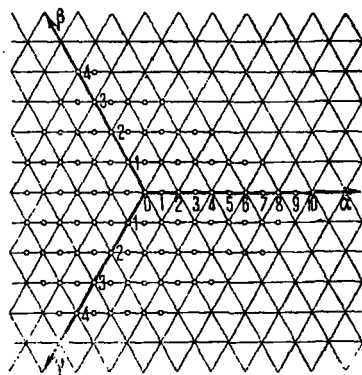


Рис. 2.

эти числа уже сами по себе дадут показатели в разложении на простые множители. При этом об опущении целых степеней 60 совершенно не приходится заботиться, ибо об этом заботится наша диаграмма сама. Стоит составить такую таблицу, и наша диаграмма даст нам тотчас же возможность непосредственно убедиться в существовании закономерных связей между любыми предложенными нам рядами чисел. Так, например, если мы напечатаем на диаграмму тексты, цитированные выше на стр. 26, то можно при взгляде на рис. 3 сразу же убедиться, что они получают друг из друга путем процедуры деления на 2, что одной из исходных точек является чистая степень 5

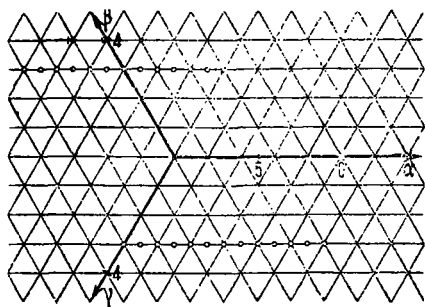


Рис. 3.

(эта точка лежит на оси y) и что мы имеем дело с обратными числами (симметрия относительно начала координат).

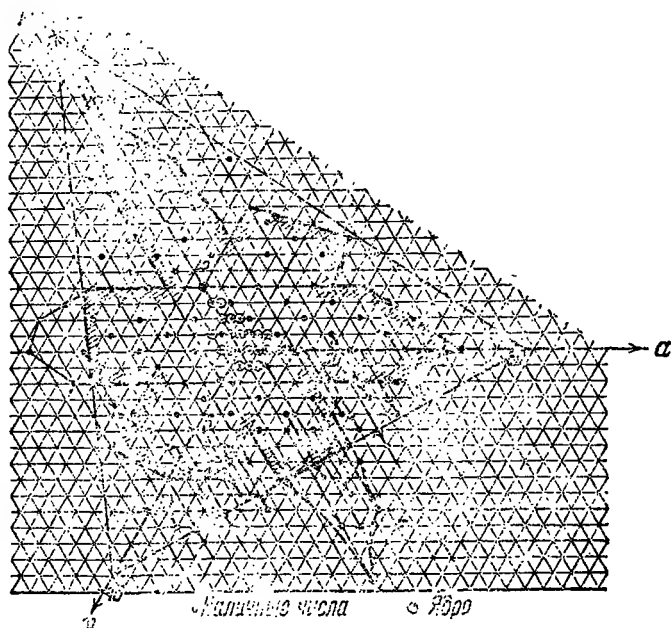


Рис. 4.

Разумеется, выбранный нами пример настолько прост, что сам по себе не нуждается в исследовании при помощи диаграммы; однако при работе над нашими большими таблицами обратных значений закономерность не может быть так просто установлена без этого вспомогательного средства. На рис. 4 изображено, что можно вычитать из

нашей таблицы, помещенной на стр. 27, при помощи ее изображения в виде диаграммы. Внешний треугольник ограничивает область, внутри которой должны лежать все правильные числа, имеющие максимум 6 знаков. Вторая особенность текста — именно, что первыми цифрами чисел левого столбца должны быть 1 или 2, — имеет следствием то, что может быть использована только часть целых точек внутри этого треугольника. Пространство, обведенное заштрихованной линией, показывает, внутри какой области все возможные целые точки такого рода действительно представлены числами, содержащимися в тексте. Мы видим, что числа этой области характеризуют направления α , β и γ . Ширина каждой из лент, имеющих координатное направление, очень характерна: она равна как раз той ширине, которую имеет в соответствующем направлении группа точек вокруг начала координат, обозначенных маленькими кружками. Эти точки являются изображениями чисел, содержащихся в нашей обыкновенной «нормальной таблице», изображенной на стр. 26. Итак, смысл нашей диаграммы следующий. Пусть нам уже известно, как составить все пары mn , содержащиеся в обыкновенной нормальной таблице. Будем применять к этим парам процесс деления на 2, 3 и 5 до тех пор, пока мы не придем в область пяти- и шестизначных чисел (по шестидесятеричной системе). Тогда сама собой получится точечная область типа mn этой области, обведенной на рис. 4. В нашем тексте этот процесс не доведен до полного исчерпания всех возможных комбинаций — до получения всех решительно шестизначных чисел. Это видно из наличия на нашей диаграмме еще свободных областей внутри треугольника. Равным образом и в тексте это прямо отмечено: «Таблица обратных значений от 1 до 3 неполная». В отрицательных же направлениях α и β (т. е. при делении на 2 и 3) процесс доведен даже несколько дальше, чем до шестизначных чисел¹⁾.

С исторической точки зрения мы получаем таким образом интересный результат. Мы видим, что по крайней мере в этом позднем тексте при составлении обширных таблиц обратных значений вполне сознательно применяется систематическая процедура: числа первоначальной маленькой нормальной таблицы подвергаются последовательному делению на 2, на 3, на 5. Этот вывод отнюдь не является чем-то само собой подразумевающимся. Так, например, при изучении египетских операций с дробями мы убедимся в том, что вспомогательные приемы вычисления могут быть обусловлены совершенно другими соображениями. Помимо этого важно также удостовериться в том, что для составления таблиц применен путь, ведущий по возможности непосредственно к цели, что, например, вычисление не производилось путем простого деления $1 : a$; и этот путь мог бы привести к таким же таблицам, но он потребовал бы ряда бесплодных делений в случае значсителей, не приводящих к развертывавшей в конечную шестидесятеричную дробь. Наконец упомянутое уже замечание в конце текста показывает,

¹⁾ Интересующихся подробностями отошлю к моей работе *Sexagesimal-system und babylonische Bruchrechnung IV, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, B. 2, стр. 199 и сл., МКТ, гл. I, § 2 (см. список литературы, I. 2 или соответственно I. 1).

что вавилоняне отдавали себе полный отчет в том, какие результаты дает применяемая ими процедура и насколько она исчерпывает возможные решения.

Итак, все сказанное показывает нам, что позиционный счет был использован в вавилонской математике в полном объеме. Когда мы перейдем к собственно математическим текстам, то на каждом шагу будем убеждаться, насколько верно это наблюдение.

г) Добавление. Обобщенные таблицы обратных значений.

Таблицы обратных значений, о которых мы говорили до сих пор, разделяются в основном на два класса: 1) обыкновенные, представленные образцами из всех эпох, малые таблицы, имеющие размеры нормальной таблицы (см. выше, стр. 26), и 2) небольшое число многозначных таблиц, наибольшую из которых мы только что последовали. Общей чертой всех этих таблиц является то, что в них правильным числам n противопоставлены другие правильные числа $\bar{n}$ таким образом, что произведение $n\bar{n} \equiv 1$ (мн. 60). Если оставить в стороне варианты, пока не представляющие для нас интереса, то *terminus technicus*, характерный для этих таблиц, это — слово *igi*.

Кроме этих существует еще несколько текстов, внешне имеющих такую же структуру, в которых, однако, произведение чисел обоих столбцов не $\equiv 1$, а (поскольку можно судить из дошедших до сих пор образцов) $\equiv 10$ или 70 (мн. 60).

Пример:

<i>igi</i> 3	3,20	и соответственно	<i>igi</i> 2,30	28
<i>igi</i> 4	2,30	»	<i>igi</i> 2,40	26,15
<i>igi</i> 5	2	»	<i>igi</i> 2,46,40	25,12
<i>igi</i> 6	1,40	»	<i>igi</i> 3	23,20
<i>igi</i> 8	1,15	»	<i>igi</i> 3, 7,30	22,24

Обе таблицы, очевидно, составлены из обыкновенных таблиц обратных значений тем способом, что правый столбец таблицы умножен на 10 или на 1,10. Какую роль играли эти таблицы для вавилонской вычислительной техники, пока неясно. Ясно только то, что первая из этих таблиц дает те дробные части десяти, которые могут быть развернуты в конечные шестидесятеричные дроби. Соответственным образом во второй таблице речь идет о дробных частях неправильного числа 70. Пожалуй, мы вправе видеть в такого рода таблицах первое указание на деление на неправильные числа. Но, как уже замечено выше, имеющийся в нашем распоряжении материал недостаточен, чтобы сколько-нибудь убедительным образом ответить на эти вопросы.

В терминологическом отношении важно то, что слово *igi* употреблено здесь совершенно так же, как в обыкновенных таблицах обратных значений. Как и в большей части других случаев, нам приходится и

здесь выводить фактическое значение математических терминов исключительно из примеров их применения. Из настоящего случая мы видим, что *igi* должно иметь столь широкое значение, чтобы под него подходили как обратные величины относительно 1 или 60, так и обратные значения в более общем смысле (здесь относительно 10 или соответственно 70). Первоначальное значение этого слова не дает объяснения ни для того, ни для другого, так как *igi* означает всего только «глаз», «видеть» и тому подобные родственные понятия.

§ 2. ДРУГИЕ ТАБЛИЦЫ И ВАВИЛОНСКАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА ВООБЩЕ.

а) Сложение и вычитание.

В системах цифр вроде нашей нынешней счет выражается символами, такими, как 2, 3, 5 и т. д., которые бессмысленны сами по себе и приняты лишь вследствие известного соглашения; поэтому, применяя такие системы, приходится учиться, как оперировать с этими символами при сложении или вычитании. Наоборот, при всех тех цифровых системах, которые в существенных своих чертах основаны на изображении единиц или соответственно десятков путем соответственно повторяемого приставления отдельных знаков, как это имеет место при написании чисел египетскими и клинописными цифрами (по крайней мере при счете от 1 до 59), всякое складывание и вычитание равносильно непосредственно наглядному приставлению или отниманию, причем должно соблюдаться лишь правило, что вместо каждых 10 знаков, изображающих единицы, берется символ для 10. Если в том или ином месте система чисел дошла до такого ильменного выражения, то этим в то же время и исчерпывается сложение и вычитание. При такой системе цифр сложение и вычитание не могут считаться особыми «арифметическими действиями», так как самое их выражение в ильме сводит вычисление к простому подсчету числа отдельных знаков.

В вавилонском цифровом написании наряду с простым приставлением цифровых знаков при необходимости произвести сложение существует и приставление, обозначающее вычитание. Оно основано на применении слова *lal* (обозначаемого знаком , причем *a lal b* означает *a — b*. Как раз в наиболее древних текстах этот прием применяется очень часто в самых различных комбинациях, особенно же в так называемых текстах хозяйственного содержания, т. е. в счетах доходов, расходов и т. д. В собственно математических текстах я не знаю ни одного примера приставления чисел, обозначающего вычитание, но оно сохранилось в таблицах и при том прежде всего для обозначения числа 19, которое в этих текстах выражается без всякого

различия то через , т. е. $10 + 9$, то через , т. е. $20 - 1$. В одной из наиболее древних из известных мне таблиц обратных значений можно найти особенно оригинальное написание. Эта таблица принадлежит к типу В (см. выше, стр. 24) и поэтому дает на левой стороне все числа от 3 до 60. Числа, как правило,

написаны обычным способом сложения, за исключением лишь чисел, кончающихся на 7, 8 и 9. Эти числа написаны способом, изображенным на рис. 5¹⁾. Первые из изображенных здесь чисел надо, разумеется, читать как $40 - 3 = 37$, $40 - 2 = 38$ и т. д. Но особенно оригинальна третья группа чисел²⁾. Подходя чисто формально, их надо было бы транскрибировать в виде $1-3$, $1-2$, $1-1$; но в действительности они означают не -2 , -1 и 0 , а (ввиду позиционного характера этой системы цифр) 57, 58 и 59.



Рис. 5.

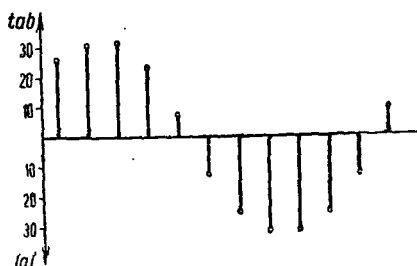


Рис. 6.

Интересное применение знака *lal* и аналогичного ему знака *tab* (прибавлять) мы встречаем в астрономических текстах позднего времени. Примером может служить следующее извлечение из текста:

26,21	<i>tab</i>
31,23,30	<i>tab</i>
31,47,30	<i>tab</i>
23,15	<i>tab</i>
7,55	<i>tab</i>
11,57,30	<i>lal</i>
25, 2,30	<i>lal</i>
31,20	<i>lal</i>
31,50	<i>lal</i>
25,48,30	<i>lal</i>
11,43,30	<i>lal</i>
9,9	<i>tab</i>

Стоящие вслед за цифрами знаки *tab* и *lal* играют при этом совершенно ту же роль, как наши знаки $+$ и $-$, стоящие впереди соответствующего числа. Если содержащиеся здесь числа изобразить графически на бумаге одно за другим с соответствующими знаками $+$ и $-$ и прибегнуть к интерполяции, соединив их линией, то мы убедимся, что они образуют волновую линию, которая может служить для описания периодических процессов (рис. 6). В третьем томе этих лекций мы специально займемся этим способом описания периодических явлений.

¹⁾ Числа от 17 до 19, а также 27 и 28 не сохранились вследствие повреждения таблички. 29 написано в виде 30 *lal* 1. Наоборот, 7 и 8 написаны обычным способом сложения, а 9 как 10 *lal* 1.

²⁾ Третий вертикальный столбец. *Переводчик.*

б) Умножение и деление.

Уже выше было сказано, что деление $b : a$ осуществлялось в виде умножения $b \cdot \bar{a}$, где $\bar{a}$ означает величину, обратную a , которую следует взять из таблицы обратных значений. При таком сведении деления к умножению нет уже ничего удивительного в том, что до нас дошло большое количество текстов, очевидно, игравших роль «*таблиц умножения*»; эти таблицы дают последовательные числа, кратные одному и тому же числу; способ составления этих таблиц будет описан на ближайших страницах.

Прежде чем перейти к вопросу, как эти таблицы умножения выглядели фактически, необходимо дать себе отчет в том, как вообще можно составить такие таблицы. Очевидно, для этого не требуется ничего другого, кроме того, что применяется для составления наших школьных таблиц умножения, т. е. надо составить себе полный реестр всех произведений всевозможных пар однозначных шестидесятеричных чисел. Тогда всякое умножение многозначных чисел сведется к сложениям. Наиболее компактной формой такой таблицы 1 770 различных произведений пар однозначных шестидесятеричных чисел в принципе следует считать следующую:

1	59	58
2	1,58	1,56
3	2,57	2,54
58	57,2	56,4
59	58,1	

3	2	1
6	4	
9		

Но когда имеешь дело с историческими фактами, то трудно ожидать, чтобы как раз этот наиболее компактный способ выражения оказался осуществленным в действительности. Скорее следует ожидать, что мы встретим 58 отдельных таблиц, составленных по следующей схеме:

2	3	58	59
4	6	1,56	1,58
6	9	2,54	2,57
1,56	2,54	56,4	57,2
1,58	2,57	57,2	58,1

причем в каждой отдельной таблице будут содержаться все произведения «основного числа» (так мы будем в дальнейшем всегда обозначать первое число такой таблицы) на числа от 1 до 59.

Стоит взглянуть на дошедшие до нас в действительности клинописные таблицы, чтобы убедиться в верности этого допущения. Так,

		7 a-gá	1	7
		a-gá	2	14
		a-gá	3	21
		и т. д.		
		a-gá	19	2,13
		a-gá	20	2,20
		a-gá	30	3,30
		a-gá	40	4,40
		a-gá	50	5,50

Рис. 7.

при этом в расчет то, что при умножении на числа большие 20 можно прибегнуть еще к сложению. Поэтому схему, данную на стр. 35, можно заменить другой, более краткой:

1	2	3	59
2	4	6	1,58
3	6	9	2,57
19	38	57	18,41
20	40	1	19,40
30	1	1,30	29,30
40	1,20	2	39,20
50	1,40	2,30	49,10

¹⁾ Об истории этого термина в языке см. ниже, стр. 83.

например, из рис. 7 мы непосредственно убеждаемся, что перед нами таблица умножения с основным числом 7 (клинописный знак читается как a-gá; из приводимого примера очевидно, что он применяется в смысле нашей частицы «жды») ¹⁾. Однако этот текст несколько отличается от данной выше схемы: он не содержит всех 59 чисел, кратных основному числу 7; подряд даны только первые 20, а дальше только произведения на 30, 40 и 50.

Это может иметь, очевидно, только тот смысл, что в целях сокращения размеров таблицы

В такой таблице будет только $23 \cdot 58 = 1334$ числа вместо $59 \cdot 58 = 3422$ чисел. При необходимости можно было бы применить сказанное и к основным числам, т. е. ограничиться только двадцатью двумя основными числами: от 2 до 20 и 30, 40, 50; тогда получилось бы всего 506 произведений:

1	2	3		19	20	30	40	50
2	4	6		38	40	1	1,20	1,40
3	6	9		57	1	1,30	2	2,30
19	38	57		6,1	6,20	9,30	12,40	15,50
20	40	1		6,20	6,40	10	13,20	16,40
30	1	1,30		9,30	10	15	20	25
40	1,20	2		12,40	13,20	20	26,40	33,20
50	1,40	2,30		15,50	16,40	25	33,20	41,40

Нашей задачей является теперь исследовать, насколько совокупность дошедших до нас текстов соответствует этой предположенной нами идеальной схеме. Предварительно надо, однако, обратить внимание на небольшую внешнюю разницу, наблюдающуюся в этих таблицах. Таблицы умножения встречаются в двух различных видах: либо в виде так называемых *отдельных таблиц*, как на рис. 7, где мы имеем дело только с одним основным числом, либо как *комбинированные таблицы*, т. е. клинописные документы, содержащие не одну таблицу такого рода, а целый ряд таких таблиц, следующих одна за другой на одной и той же глиняной табличке. Число таблиц в таком клинописном документе, поскольку мы можем судить, колеблется совершенно произвольно между 3 и приблизительно 40. Кстати, такие комбинированные таблицы содержат часто не только таблицы умножения, но в некоторых случаях и таблицы обратных значений и таблицы других типов; к этому вопросу мы еще вернемся. «Отдельные таблицы» и «комбинированные таблицы» непосредственно увязаны друг с другом тем способом, что часто отдельные таблицы кончаются «строкой переноса», т. е. строкой, в которой указывается, что читается в первой строке другой отдельной таблицы, следующей за данной таблицей. Таким путем отдельные таблицы соединяются в замкнутые «серии» (мы имеем, таким образом, дело со своеобразным способом обозначения страниц); очень скоро мы увидим, что и наши отдельные таблицы умно-

нения образуют такие замкнутые серии, включающие частью отдельные, частью комбинированные таблицы.

По исследовании всей совокупности дошедших до нас весьма многочисленных отдельных и комбинированных таблиц умножения обнаруживается, что эти таблицы резко уклоняются от схемы, предположенной нами а priori. Рассмотрим, например, следующую таблицу:

16,40 a-rá 1	16,40
a-rá 2	33,20
a-rá 3	50
a-rá 4	1, 6,40

и т. д.

a-rá 19	5,16,40
a-rá 20	5,33,20
a-rá 30	8,20
a-rá 40	11, 6,40
a-rá 50	13,53,20

16 a-rá 1	16
-----------	----

Основное число этой таблицы 16,40 не принадлежит к числу однозначных шестидесятеричных чисел—оно двузначно. Можно было бы попытаться объяснить этот факт тем, что табулировали также и двузначные основные числа. Но невозможность такого допущения нетрудно доказать приведением к абсурду. С одной стороны, это означало бы, что только для того, чтобы сэкономить одно сложение, составляли колоссальное число таблиц, 3600 (хотя несколько не смущались тем, что к такому сложению приходилось прибегать при умножении чисел от 20 до 60). Кроме того, нам известны таблицы умножения с трехзначным основным числом 44,26,40. Вряд ли можно думать, что было составлено 60^3 различных таблиц. И, наконец, сам цитируемый текст противоречит допущению, что существовали таблицы, содержавшие в непрерывной последовательности хотя бы все двузначные числа. В самом деле, в этом тексте под двойной чертой стоит «строка переноса» «16 раз 1 16». Это значит, что за таблицей умножения для 16,40 должна была следовать не соседняя с ней таблица для 16,41, а таблица для 16.

Мы видим, таким образом, что фактическое положение вещей в текстах сводит совершенно на-нет всю созданную нами красивую теорию о непрерывной серии произведений $a \cdot b$. Это видно очень ясно из рис. 8. Рассмотрим сначала левую часть рисунка, посвященную отдельным таблицам. В левом столбце даны одно за другим те основные числа, для которых сохранились таблицы умножения. Уже с первого взгляда отсюда видно: ряд этих следующих друг за другом основных чисел не имеет ничего общего с предположенным нами рядом 2, 3, 4, ..., 59,

так как, с одной стороны, в нем содержатся лишь очень немногие числа из этого ряда, а, с другой — больше половины этих чисел неоднозначны. Наш материал настолько обилен, что мы не вправе видеть в этом простой случай. На рис. 8 каждый кружок обозначает отдельную таблицу. Например: мне известны по две отдельные таблицы для 45, для 44,26,40, для 36, для 30, по пять для 25, для 24 и т. д., для 18 и т. д., две для 1,30. Дальнейшим подтверждением того, что этот ряд чисел не имеет пробелов, могут служить тексты со «строкой перепоса». Так, данная нами выше таблица для 16,40 со «строкой перепоса» для 16 представлена на рис. 8 кружочком со стрелкой, указывающей на цифру 16. И в самом деле, до нас дошли также две отдельные таб-

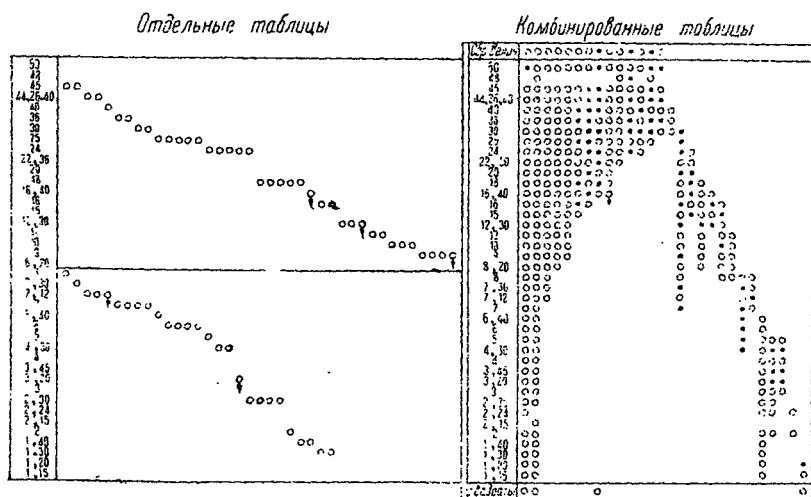


Рис. 8.

лицы для 16. Аналогичное явление мы встречаем и в других случаях, например для 12,30 или 9. До нас дошли четыре таблицы для 9; одна из них имеет ссылку на 8,20. Это дает нам право, хотя до нас случайно не дошло ни одной таблицы для 8,20, сделать допущение, что такая таблица существовала. Таким образом отдельные таблицы дают нам большое количество текстов, связанных между собой в один непрерывный ряд, и притом всегда в порядке убывания основных чисел.

Теперь мы перейдем к рассмотрению комбинированных таблиц (правая сторона рис. 8). В этой части рисунка мы можем увидеть слева опять как раз ту же последовательность чисел, что и в отдельных таблицах. Мы прибавили только на самом верху нашей схемы слово «обратные значения»; это означает, что соответствующая глиняная табличка содержит не только таблицы умножения, но и таблицу обратных значений (причем последнюю всегда на первом месте). Точно так же внизу нашей схемы мы прибавили слово «квадраты», указывающее на наличие таблицы квадратов чисел (см. ниже, стр. 49). Каждый вертикальный ряд кружочков и точек обозначает одну комбинирован-

ную таблицу, содержащую те таблицы, которые отмечены кружками или точками [точки означают, что соответственные таблицы ныне уже не читаются вследствие повреждения табличек, но что можно быть с несомненностью уверенным, что они прежде читались — как прихотит к таким дополнениям, будет объяснено ниже (см. 2, стр. 47)]. Итак, первый вертикальный ряд точек и кружков означает, что мы имеем текст большого размера, начинающийся с таблицы обратных значений, за которой следует таблица умножения для 50, затем такая же таблица для 45 и т. д., вплоть до таблиц для 1,20 и 1,15, и что этот текст кончается таблицей квадратов чисел. Если пренебречь пропуском чисел 48 и 2,15, то этот текст содержит вообще все таблицы умножения, которые, как мы видим из левой части нашей схемы, встречаются на отдельных таблицах. Другие приводимые здесь таблицы вполне подтверждают создавшееся у нас впечатление. Нетрудно видеть, что они являются частными множествами этой общей схемы и что порядок отдельных таблиц всегда точно совпадает с уже известным нам порядком с тем лишь небольшим исключением, что в некоторых случаях опущено основное число 48 в начале и 2,24 или 2,15 в конце таблицы¹⁾. Итак, мы пришли к следующему выводу: вавилонские таблицы умножения не составлены по идеальной схеме для таблиц произведений $a \cdot b$; тем не менее они составлены по своеобразной и точно определенной схеме, в которой основные числа идут в убывающем порядке.

Итак, пред нами задача — объяснить, откуда взялась эта резкая разница между «идеальной» схемой и данными нам в опыте историческими фактами. Нетрудно понять, как следует подойти к решению этой задачи. Необходимо попытаться вскрыть общий закон, по которому составлен последовательный ряд основных чисел, отклоняющийся от априорно-ожидаемого ряда из всех целых чисел от 2 до 59. Чтобы найти этот принцип, надо, разумеется, прежде всего подвергнуть рассмотрению содержащиеся здесь двузначные и многозначные числа — в первую голову такое поразительное число, как 44,26,40. Оказывается, что как раз это число дает нам непосредственно ключ к решению задачи. Стоит только вернуться к нашим таблицам обратных значений и взглянуть на «нормальную таблицу» (стр. 26): эта таблица кончается обратными числами 1,21 и 44,26,40. Итак, 44,26,40 — это не что иное, как число, взятое из наших таблиц обратных значений. Нетрудно убедиться, что и все другие числа (за одним только исключением, о котором мы будем сейчас говорить) являются п р а в и л ь н ы м и. Другими словами: *основные числа наших таблиц умножения можно рассматривать как шестидесятеричные дроби, т. е. как обратные значения правильных чисел.*

¹⁾ На рис. 8 нанесены не все известные мне комбинированные таблицы умножения, равно как и не все дополнения. Однако то, что здесь опущено, ни в одном случае не противоречит нашему изображению; в этих не вошедших сюда таблицах встречаются лишь небольшие неправильности, например пропуски и повторения (так называемые «школьные тексты»), не представляющие интереса с точки зрения разбираемых здесь вопросов. Исчерпывающий перечень можно найти в МКТ (I, I), гл. I, § 3 с.

Мы получаем, таким образом, представление о принципах структуры всей рассмотренной выше системы таблиц. Тот факт, что основные числа таблиц умножения могут быть рассматриваемы как некоторые простые дроби вида $1:a$, развернутые в шестидесятеричные дроби, означает, очевидно, следующее.

Система таблиц умножения дает не все возможные произведения $b \cdot a$, а содержит выражения вида $b \cdot \bar{a}$, представленные в виде шестидесятеричных дробей, т. е. *кратные правильных основных дробей* (основными дробями мы называем дроби с числителем 1). Иными словами, мы приходим к окончательному выводу: задачей, послужившей исходным пунктом для составления таблиц умножения, не была формальная задача облегчения обыкновенного умножения: целью составления этой системы таблиц было решение специальной задачи на дроби, именно, выражение в шестидесятеричной системе кратных дроби с единицей в числителе, также выраженной в шестидесятеричной системе. В вавилонской математике это означает, разумеется, преобразование выражения $b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \bar{a}$ к виду конечной шестидесятеричной дроби. Ниже мы убедимся, что вполне аналогичная задача — именно нахождение кратных дроби с единицей в числителе — имеет точно такое же основное значение и в египетской математике. Такая постановка вопроса сохраняет свою силу и в греческой и в римской вычислительной технике вплоть до позднего средневековья, т. е., в сущности, до того времени, когда снова систематически проводится позиционное написание чисел, т. е. когда вводится десятичная система. Но с точки зрения истории математических идей важно отметить то, что все эти преобразования связаны между собой одной основной проблемой: как преобразовать кратные основных дробей в рамках определенной системы чисел. Таким образом наше исследование привело нас к вопросу, являющемуся действительно центральной проблемой всей античной вычислительной техники.

Эти замечания не исчерпывают, однако, всего исторического значения нашей системы таблиц. Мы можем двигаться дальше в двух направлениях. С одной стороны, мы можем идти далее вглубь истории с тем, чтобы получить еще более отчетливое представление о первоначальных версиях системы вавилонских таблиц обратных значений и таблиц умножения и их связи между собой. С другой стороны, мы должны дать себе отчет о связи нашей системы таблиц с естественно возникающим и поставленным в начале нашего исследования вопросом, именно о вопросе о применении этих таблиц для обыкновенного умножения. В самом деле, из позиционного характера всех вавилонских числовых знаков ясно, что для практического применения таблиц вовсе не было нужды знать, что основные числа наших таблиц первоначально обозначали дроби, — ими можно было пользоваться и непосредственно как таблицами чисел, кратных определенным целым числам.

Мы начнем со второго вопроса, хотя бы для того, чтобы сделать важное дополнение к данному выше описанию системы таблиц умножения. Было бы ошибкой утверждать, что все основные числа в нашей

системе таблиц правильные: есть одно исключение из этого правила, именно основное число 7, которое никак не может представлять собой выражение дроби $1 : a$ в шестидесятеричных дробях. Это единственный случай, к которому неприменима наша реконструкция первоначальной функции таблиц.

Но в наших рассуждениях мы вовсе не имели целью утверждать, что умножение основных дробей на целые числа было некогда единственной задачей нашей системы таблиц. Нам важно было только дать понять читателю, что структура этих таблиц позволяет еще теперь заключить, какая задача послужила исходным пунктом для составления этих таблиц. Однако на той стадии, когда таблицы приняли канонический вид, представленный на рис. 8, первоначальное положение вещей, когда действия с дробями еще были трудной проблемой, давно уже отошло в область предания. Из собственно математических текстов следует с достаточной убедительностью, что в это время вавилоняне уже прекрасно умели использовать неопределенность позиции в числах, написанных по шестидесятеричной системе, и что давно уже для них не представляло никакого интереса приписывать отдельным числам в той или иной таблице определенную позицию, рассматривая основное число таблицы как шестидесятеричную дробь, а не как любое число с неопределенной позицией. В этом именно случае видно особенно ясно, насколько вавилоняне были хозяевами положения в этих вопросах. Они нашли способ путем одного лишь видоизменения создать из возникшей в историческом процессе системы таблиц для действий над дробями замкнутую систему таблиц умножения. Правильные числа следуют друг за другом сначала очень плотно: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10 — правильные числа, равно как и 20, 30, 40, 50. Между 1 и 10, таким образом, содержится только одно число, 7, которое выпадает из этой таблицы правильных чисел. Поэтому стоит прибавить к этой системе таблиц еще таблицу умножения для 7 и удовлетвориться тем, что для чисел между 10 и 60 в случае нужды придется произвести еще одно сложение (аналогичное сокращение для чисел между 20 и 60 было уже проведено в отдельных умножениях на каждой из таблиц умножения), и мы получим — только благодаря этому единственному дополнению — вполне удобную схему для произведений ab , по существу вполне совпадающую с той схемой, которую мы в начале этого параграфа априорно представили себе как простейшую схему вспомогательных таблиц для умножения. Следующая схема (см. стр. 43) представляет собой не что иное, как добавочное незначительное сокращение схемы на стр. 37. То, что эта система таблиц, являющаяся переработкой таблиц для действий над дробями, содержит кое-что сверх данной выше схемы (например ряд однозначных основных чисел между 20 и 60, как 25 и 45 и, кроме того, несколько многозначных), является только преимуществом, и поэтому составители, не задумываясь, сохранили эти таблицы, тем более что старинная задача разложения в шестидесятеричную дробь выражения $\frac{a}{b}$ и в позднейшее время сохранила свое практическое значение. Таким образом наша система таблиц представляет собою чрезвычайно удобное

1	2	3	9	10	20	30	40	50
2	4	6	18	20	40	1	1,20	1,40
3	6	9	27	30	1	1,30	2	2,30
19	38	57	2,51	3,10	6,20	9,30	12,40	15,50
20	40	1	3	3,20	6,40	10	13,20	16,40
30	1	1,30	4,30	5	10	15	20	25
40	1,20	2	6	6,40	13,20	20	26,40	33,20
50	1,40	2,30	7,30	8,20	16,40	25	33,20	41,40

практическое средство как для умножения, так и для деления ¹⁾. Эта система приблизительно из 40 таблиц, несмотря на ее сравнительно очень малые размеры, дает все, что необходимо при не слишком больших расчетах. Только в самую позднюю эпоху вавилонской истории, быть может, в связи с развитием вычислительной астрономии, появилась потребность, по крайней мере для деления ²⁾, в более подробных таблицах, как мы в этом уже убедились из рассмотрения многозначных таблиц обратных значений в § 1в (стр. 27).

Теперь мы снова вернемся ко второму из поставленных нами вопросов и проследим еще дальше связь между нашими «таблицами умножения» и задачей деления, т. е. попытаемся как можно больше узнать о первоначальном виде наших таблиц и положенной в их основу математической аргументации. Единственная «настоящая» таблица умножения для 7 и в этом случае должна быть оставлена без внимания, поскольку нас интересует первоначальное состояние нашей системы таблиц. Мы начинаем снова с указания на существование основного числа 44,26,40, являющегося обратным для 1,21. Далее мы вспомним о

¹⁾ И с внешней стороны эти таблицы умножения имеют довольно удобную форму. Так, например, большая комбинированная таблица, соответствующая второму вертикальному ряду кружочков на рис. 8 (правая часть), имеет размер 21×28 см, несмотря на то, что она представляет собой полное собрание всех отдельных таблиц и содержит 1200 строк. Ср. также стр. 216.

²⁾ Подчеркивание значения проблемы деления для астрономии объясняется тем, что одной из существенных задач астрономии является точное определение длины периода, когда известно число таких периодов между двумя одинаковыми явлениями. Однако для таких сложных делений уже недостаточно небольших таблиц обратных значений, тогда как таблицы умножения все еще пригодны и разве лишь требуют дополнительного выполнения большого числа сложений.

том, что первые две строки таблиц обратных значений, которые мы рассмотрели в § 1, указывают на то, что и в этом типе таблиц первоначально имелись в виду числа с абсолютным позиционным значением. В этих двух строках были просто даны специальные обозначения для «двух третей» или «половины» в виде «40» или «30» (см. выше, стр. 25). Это указывает на то, что на более ранней ступени развития числам таблицы обратных значений были приданы абсолютные позиционные значения по следующей схеме:

$\frac{2}{3}$	0;40
$\frac{1}{2}$	0;30
(1:)3	0;20
(1:)4	0;15

и т. д.

Тогда, рассуждая в том же духе, мы должны в конц этой таблицы, именно:

54	1, 6,40
1	1
1, 4	56,15
1,21	44,26,40

понимать как

(1:)54	0;1, 6,40
(1:)1,0	0;1
(1:)1,4	0;0,56,15
(1:)1,21	0;0,44,26,40.

Но мы убедились также, что основные числа таблиц умножения (50, 48, 45, 44,26,40 и т. д. до 1,15) взяты из таблиц обратных значений. Первоначально они имели, следовательно, то же абсолютное значение, как и в первоначальной фазе таблиц обратных значений. Иными словами, 50 надо понимать как $1,12 = 0;0,50$, 48 — как $1,15 = 0;0,48,45$ — как $1,20 = 0;0,45$, 44,26,40 — как $1,21 = 0;0,44,26,40$ и т. д., вплоть до 1,15 как $48,0 = 0;0,1,15$. Это означает следующее: необходимо допустить, что первоначально основные числа таблиц умножения были выражением в шестидесятеричной системе дробей $1,12 = \frac{1}{72}$, $1,15 = \frac{1}{75}$, $1,20 = \frac{1}{80}$, $1,21 = \frac{1}{81}$ и т. д. вплоть до $48,0 = \frac{1}{2880}$. С другой стороны, кажется наиболее вероятным, что множители таблиц умножения были первоначально целыми числами. В таком случае произведения, содержащиеся в нашей системе таблиц, оказались бы произведениями целых чисел промежутка от 1 до 60 на дробь с числителем 1, все знаменатели которых больше 60 (но, однако, меньше чем 3600).

Заметим, что эти таблицы для действий над дробями были устроены так, что они служили для превращения в шестидесятеричные дроби не любых неправильных дробей $\frac{b}{a}$, а только *правильных* дробей, у которых знаменатель больше числителя; этот факт имеет большое историческое значение. Это доказывает, что и в сфере вавилонской культуры понятие дроби первоначально включало в себя только действительно дробную часть числа, меньшую, чем единица. В гл. IV мы будем еще подробно говорить о том, что и структура египетской математики в своих основных чертах обусловлена тем, что в арифметике дробей было особенно подчеркнуто первоначальное наглядное понятие дроби и что оно никогда не было заменено общим понятием числа вроде нашего рационального числа $\frac{b}{a}$. Могло бы казаться, что вавилонская математика сделала этот шаг именно в тот момент, когда были составлены системы таблиц для $b \cdot \bar{a}$. Но как раз те факты, о которых мы только что говорили, показывают, что это первое впечатление неверно. Первоначально эти таблицы содержали только кратные дроби с числителем 1, и притом только такие кратные, которые не достигали единицы. Итак, мы имеем здесь дело только с последовательным прибавлением друг к другу мелких единиц до достижения определенной величины, т. е. с таким же «взятием во множественном числе», как и при всяких других конкретных предметах, число которых жалают сосчитать. Это не имеет ничего общего с обобщением понятия дроби или числа. Существенно новый момент присоединяется сюда лишь потому, что система цифр, в которой выражены эти арифметические действия, имеет позиционный характер. Благодаря этому дроби, задуманные первоначально в абсолютном виде, получают вид, позволяющий совершенно отвлечься от их абсолютного значения. Так, дроби $\bar{a}$ с числителем 1 могут быть без дальнейших преобразований рассматриваемы как любые числа с шестидесятеричной системы, и наши таблицы можно понимать как произвольные таблицы умножения $b \cdot c$. То, что переход к такому свободному обращению с таблицами был сознательным шагом, показывает не только прибавление таблицы умножения для $c = 7$; это видно из того совершенства в оперировании с числами шестидесятеричной позиционной системы, которое можно наблюдать на каждом шагу в собственно математических текстах. Итак, в конечном счете только благодаря случайной структуре системы цифр, благодаря ее удивительно оригинальному формализму, вавилонская математика обошлась без особых «правил действий над дробями». Этим был открыт путь к развитию, свободному от обходных путей и приемов, обусловленных техникой счета.

Таким образом в наших таблицах умножения содержится in nuce целая глава из истории возникновения математических идей. Первоначально эти таблицы, как и таблицы обратных значений, были составлены для дробей с единицей в числителе и последовательными целыми числами в знаменателе, но только для правильных дробей (меньших, чем единица). На другом конце этого пути развития стоит полный и сознательный отказ от всякого рода абсолютного позиционного значения и

свободное использование этой гибкости чисел, написанных по шестидесятеричной системе, для всевозможных задач на умножение и деление. Ниже мы увидим, что этот процесс имеет полную параллель в истории развития числовых знаков самих по себе. И для этого второго случая мы покажем, что полная неопределенность позиции ни в каком случае не могла существовать с самого начала: она была только последним звеном в развитии вавилонской системы цифр (гл. III, § 2).

в) Отдельные замечания к системе таблиц умножения.

1. Принцип выбора основных чисел.

Мы уже убедились, что основные числа наших таблиц умножения (и в этом случае за исключением числа 7) первоначально, как следует думать, были выражены по шестидесятеричной системе дробями с числителем 1; далее мы обратили внимание на то, что все эти дроби с числителем 1 лежат между $\frac{1}{60}$ и $\frac{1}{3600}$. Естественно возникает вопрос, какие же именно числа в этом промежутке были выбраны в качестве основных чисел таблиц.

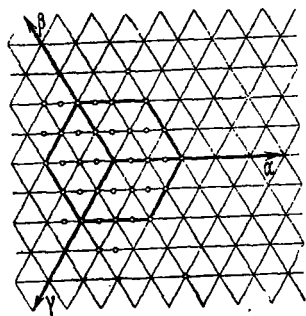


Рис. 9.

Чтобы ответить на подобный рода вопрос о закономерности некоторой группы правильных чисел, мы прибегнем и в этом случае к способу диаграмм (см. выше, стр. 28 и сл.). Для этого мы перенесем на нашу сетку из треугольников все 39 правильных основных чисел рис. 8 (см. рис. 9). Полученное таким путем точечное множество обладает тем свойством, что в него входят все узловые точки правильного шестиугольника с центром в начале координат¹⁾; только на границе этого шестиугольника лежит одна точка [$\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ или, применяя сокращение, к которому мы будем прибегать

в дальнейшем, (3,2,0), т. е. 1;12], для которой не дошло до нас ни одной таблицы умножения²⁾.

Основные числа трех таблиц, часто опускаемые в нашей схеме (см. рис. 8), именно 48, 2,24 и 2,15, это — две точки на границе шестиугольника, (4,1,0) и (4,2,0), и одна, лежащая вне его, (0,3,1). Вне шестиугольника лежат следующие точки: прежде всего (0,—4,0), т. е. 44,26,40, — наличие этой точки не должно нас удивлять ввиду всей структуры таблиц обратных значений (см. рис. 4 на стр. 30), — далее точка (2,0,3), т. е. 8,20, и ее зеркальное отображение — точка 7,12, далее точка (3,0,3), но не ее зеркальное отображение. Точки (2,0,3) и (3,0,3), вероятно, привлекли к себе внимание как десятичные числа, так как они соответствуют 500 и 1000. Остальные четыре точки, лежащие вне шестиугольника, не обнаружили, несмотря на мои поиски,

¹⁾ Самое начало координат, разумеется, и не должно входить в число этих точек, так как ему соответствовала бы таблица умножения с основным числом 1.

²⁾ 1,12 было бы основным числом в последней таблице нашей системы таблиц.

никакой закономерности. Что же касается точек, лежащих внутри шестиугольника и на его границе, то здесь можно говорить о закономерности только в следующем смысле: принадлежность точек к шестиугольнику, стороны которого параллельны осям, а центр — в начале координат, означает, что налицо полная симметрия относительно начала координат, а это равносильно тому, что каждой точке множества соответствует ее обратная величина. Разумеется, это последнее свойство очень выгодно для практической применимости наших таблиц, так что в этом, повидимому, можно видеть важную причину для выбора соответствующих чисел.

2. Дополнение текстов таблиц.

Глиняные таблички, дошедшие до нас, часто оказываются в очень плохой сохранности. Часто в нашем распоряжении только ничтожные обломки больших таблиц; поэтому очень важно, чтобы наше знакомство с законом расположения на таблицах умножения, который можно вывести из рис. 8, было использовано для того, чтобы на основании маленьких фрагментов восстановить полностью утраченные тексты или же чтобы правильно соединить и расположить эти разрозненные обломки и таким образом дополнить материал наших текстов. Мы хотим познакомить читателя с тем, как это дополнение производится.

Пусть мы имеем фрагмент комбинированной таблицы, текст которой расположен в виде ряда вертикальных столбцов, причем до нас дошла только часть его. По большей части такой текст мы можем восстановить полностью, основываясь на том, что нам известно, какие таблицы надо вставить между двумя, еще сохранившимися на комбинированной таблице. С другой стороны, нам известна длина частных таблиц, т. е. место, которое им было отведено на комбинированной таблице; поэтому, если состояние обломков не является слишком неблагоприятным, то первоначальная величина таблицы может быть восстановлена с большой уверенностью. Наиболее благоприятными надо считать те случаи, когда надпись имела и на обратной стороне таблицы. Клинописный текст, написанный в несколько столбцов, надо читать по схеме, данной на рис. 10, т. е. надо начать со столбца I, находящегося слева на передней стороне, и читать сверху вниз. Затем следует столбец II сверху вниз и т. д. вплоть до последнего столбца. Дойдя до правого нижнего угла передней стороны, надо повернуть таблицу вокруг и идти по краю передней стороны и читать дальше, непосредственно продолжая последний столбец передней стороны, т. е. начиная с правого верхнего угла задней стороны. Таким образом на обратной стороне первым столбцом является крайний столбец справа, вторым — примыкающий к нему слева и т. д. (причем мы каждый столбец читаем сверху вниз)¹⁾. Поэтому, если мы восстановили переднюю

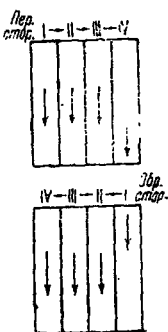


Рис. 10.

¹⁾ См. по этому вопросу также ниже, стр. 68.

сторону таблицы и повернули ее указанным образом вокруг ее узкой стороны, а затем продолжаем наше дополнение на обратной стороне, то части надписи, сохранившиеся на этой стороне, должны обязательно входить как часть в наше дополнение.

Этот прием дает прекрасные результаты в текстах, не отступающих значительно от найденных нами схем (рис. 11); он поразительным образом подтверждает наши выводы относительно таблиц умножения.

Таким путем можно, например, небольшой обломок большой таблицы, содержащий таблицу обратных значений, сразу же дополнить до комбинированной таблицы умножения, начинающейся с 50. Так, например, мне известен подобный экземпляр, на передней стороне которого начертана таблица обратных значений, а на обороте сохранился еще конец таблицы для 1,15, а за ней идет таблица квадратов чисел.

Отсюда следует, что этот обломок должен принадлежать к очень

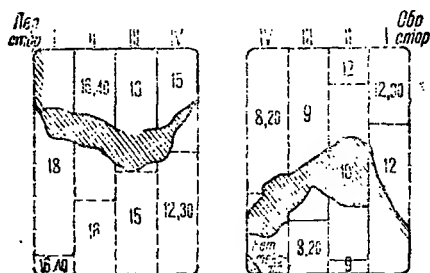


Рис. 11.

большому тексту, содержавшему все таблицы нашей схемы. Поэтому этот обломок, находящийся в Берлине, мне пришлось при расположении моего материала поместить рядом с большим текстом из Стамбула, представленным вторым вертикальным рядом кружочков на рис. 8. При более пристальном изучении фотографий оказалось, что дополнение берлинского обломка, основанное на нашей теории, было вполне правильным, так как край ломка маленького куска, находящегося в Берлине, точно пришелся к краю ломка большого текста в Стамбуле. Таким образом этим путем оказалось возможным соединить две части одной и той же таблицы (выяснилось, что обе они были найдены в одном и том же месте — в Ассуре), несмотря на то, что до этого времени, разумеется, связь их между собой не была известна. Подобные же соединения удалось осуществить, исходя из того же метода, также и на ряде других обломков.

На рис. 8 точки соответствуют таким восстанавливаемым с полной уверенностью таблицам.

В действительности путем дополнения можно было бы достигнуть еще гораздо больших результатов: на нашем рис. 8 даны только совершенно несомненные результаты (причиной того, что некоторые дополнения оказываются спорными, является следующее обстоятельство: в текстах, которые были написаны только с одной стороны или на которых имелись обратной стороны не сохранилась, уже нельзя с полной достоверностью установить положение бокового края; поэтому необходимо руководиться еще дополнительными соображениями относительно формата глиняной таблички и т. п. — вопросы, которых я здесь, разумеется, не могу касаться).

г) Другие таблицы.

Кроме таблиц обратных значений и таблиц умножения, встречаются еще, например, таблицы квадратов последовательных целых чисел от 1 до 60, например в виде:

$$n \quad a-gá \quad n \quad n^2,$$

или просто:

$$n \quad n^2,$$

при этом n проходит все целые значения $n = 1, 2, 3$ и т. д. до 1,0 или же только до 30. Как уже было замечено выше, эти таблицы присоединяются в конце системы таблиц обратных значений и таблиц умножения (см. схему на рис. 8, справа). Этому соответствует также и то, что иногда в комбинированных таблицах умножения в конце частных таблиц даны как обратное значение основного числа, так и его квадрат.

Таблицы квадратных корней представляют собой не что иное, как обращенные таблицы квадратов. Если таблица квадратов имеет примерно такой вид:

$$1 \quad a-gá \quad 1 \quad 1$$

$$2 \quad a-gá \quad 2 \quad 4$$

$$3 \quad a-gá \quad 3 \quad 9$$

и т. д.,

то таблицы квадратных корней выглядят примерно так:

$$1-e \quad 1 \quad íb-si_s$$

$$4-e \quad 2 \quad íb-si_s$$

$$9-e \quad 3 \quad íb-si_s$$

и т. д.

до

$$58,1-e \quad 59 \quad íb-si_s$$

или подобно этому. При этом частица $-e$ обозначает именительный падеж, а $íb-si_s$ есть *terminus technicus*, который должен, очевидно, иметь значение квадратного корня и о котором мы будем еще говорить подробно (ср. стр. 50 и сл.). Вообще ясно, что эти таблицы квадратных корней представляют собой лишь чисто формальное оборачивание таблиц квадратов путем перестановки столбцов.

Пока не найдено таблиц кубов чисел, но зато существуют таблицы кубических корней, имеющие вид

$$n^3-e \quad n \quad ba-si$$

и представляющие собой полную аналогию таблицам квадратных корней. Далее, до нас дошла таблица такого строения:

$$(n^2 + n^3)-e \quad n \quad ba-si;$$

вот первый попавшийся отрезок ее:

5, 4,12-e	26 ba-si
5,40,12-e	27 ba-si
6,18,56-e	28 ba-si.

Нетрудно установить, что числа, стоящие слева, равны соответственно $26^2 + 26^3$, $27^2 + 27^3$, $28^2 + 28^3$. И здесь n проходит все целые числа от 1 до 1,0.

Наконец, нам известно большое число таблиц, дающих ряд последовательных степеней некоторых целых чисел, например таблицы для всех степеней 9^n или $1,40^n$ или $3,45^n$ при $n = 2, 3, \dots, 10$. К вопросу о назначении всех этих типов таблиц мы еще вернемся, когда перейдем к собственно математическим клинописным текстам (гл. V). Здесь достаточно указать, что эти таблицы красноречиво свидетельствуют о том, какого удивительного развития достигла система вавилонской вычислительной техники, если табулировались даже такие функции. Только на одной проблеме здесь уместно остановиться подробнее, так как она всецело и непосредственно относится к вычислительной технике — именно на вопросе, как поступали, когда в процессе вычисления приходили к квадратным корням, подкоренное количество которых не представляет собой целого квадрата. Как мы видели, «таблицы квадратных корней» не дают ответа на вопрос о значении этих корней, так как их отличие от таблиц квадратов чисел чисто формальное. Проблема, которая возникает в связи с этим вопросом, есть проблема интерполяции. Уже здесь можно заметить, что вычисление иррациональных квадратных корней есть только первый случай этой общей проблемы, но что для других случаев мы еще не в состоянии дать хоть сколько-нибудь удовлетворительное решение этой проблемы. Но даже и для случая вычисления иррациональных квадратных корней мы можем сделать только первые шаги к полному ответу на этот вопрос ввиду недостаточности известного нам материала.

д) Вычисление иррациональных квадратных корней.

В собственно математических текстах квадратные корни из чисел, не представляющих собою полных квадратов, встречаются лишь в очень немногих случаях — причина этого, разумеется, в том, что большую часть этих примеров сочинили, исходя из готового решения. Поэтому нам известен только один тип примеров, который я здесь и охарактеризую кратко.

Находящийся ныне в Берлине обломок большого текста (рис. 12) содержит на обороте задачу вычисления диагоналей прямоугольника. Внешнее оформление задачи такое: прямоугольник представлен как «ворота», высота которых $h = 0;40$ GAR, а ширина $w = 0;10$ GAR, где GAR — некоторая мера длины, равная примерно 6 м¹⁾. На ри-

¹⁾ Таким образом высота этих ворот приблизительно 4 м, а ширина приблизительно 1 м, речь идет, следовательно, об узком входе.

сунках поражает то, что «ворота» всегда изображаются лежащими, а не стоячими. Впрочем, и вообще относительно математических текстов можно заметить, что части, изображаемые на рисунках слева, представляют собою «верх». В следующей главе мы вернемся к этому факту, причем подойдем к нему с более широкой точки зрения: мы увидим,

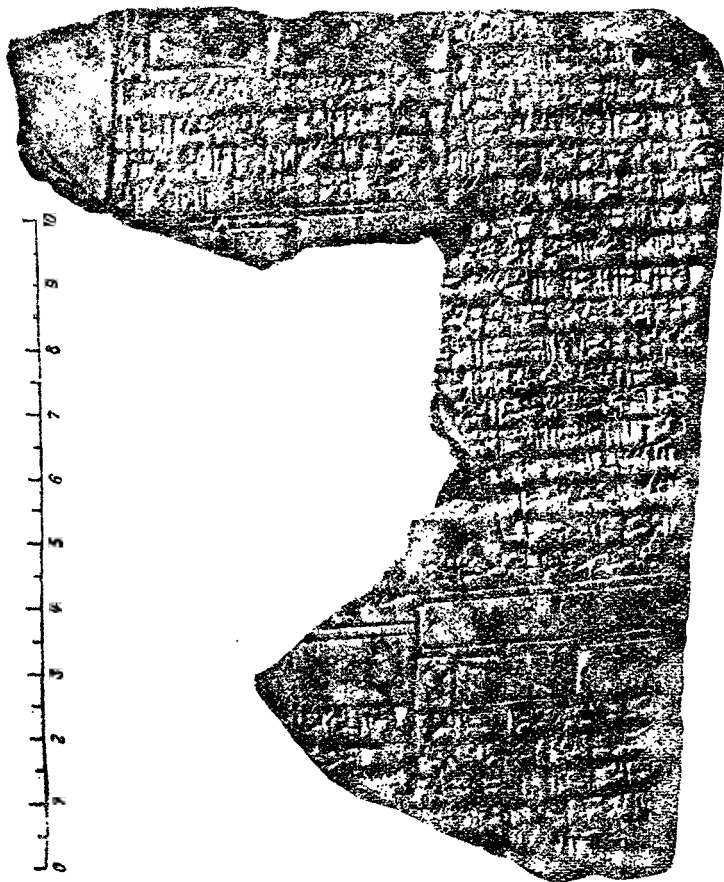


Рис. 12.

что знаки клинописи первоначально были рисунками, и поэтому их приходилось читать не горизонтально, а вертикально. При происшедшем затем повороте на 90° не были приняты во внимание последствия, проистекающие отсюда для математических чертежей¹⁾.

1) Можно было бы думать, что и в более позднюю эпоху клинописные знаки следовало читать по вертикальным строкам, для чего нужно только держать текст в другом положении. То, что это неверно, показывает изменение направления строк от вертикального к горизонтальному в надписях на строениях и памятниках.

Задача нахождения длины диагонали решается двумя путями (на рис. 12 пример первого решения находится справа и снизу, второго — слева и сверху)¹⁾. Если передать содержание очень свободно, то в первом случае процедура, примененная в тексте, выразится так: возведем в квадрат ширину 0;10. Получится 0;1,40. Помножим затем обратную величину числа 0;40 на 0;1,40. Получится 0;2,30, а половина этого 0;1,15. Эти 0;1,15 надо прибавить к высоте 0;40. Получится 0;41,15, — длина диагонали. Переведем это на язык формул, получим, что диагональ вычисляется из формулы

$$d = h + \frac{w^2}{2h}. \quad (1)$$

Второе решение задачи состоит в том, что d (применяя те же обозначения) вычисляется из формулы

$$d = h + 2w^2h. \quad (2)$$

Отсюда получается $d = 0;42,13,20$.

Никакого объяснения этих формул текст, разумеется, не дает, но мне кажется, что его можно извлечь из следующей процедуры. Из теоремы Пифагора, знакомство с которой для вавилонской математики можно с несомненностью постулировать на основании ряда мест из математических клинописных текстов, следует, что d можно вычислить из соотношения

$$d = \sqrt{h^2 + w^2} = \sqrt{0;28,20}.$$

Допустим, что известно некоторое приближенное значение α_1 иррационального квадратного корня $\sqrt{a}$ (например корень из ближайшего целого квадрата, известного из соответствующей таблицы). Тогда число $\beta_1 = \frac{a}{\alpha_1}$, очевидно, также будет приближенным значением $\sqrt{a}$, и притом таким, что β_1 меньше, чем $\sqrt{a}$, когда α_1 больше, чем $\sqrt{a}$, и наоборот. Из этих двух приближенных значений α_1 и β_1 можно получить новое и лучшее приближенное значение тем способом, что из двух первых приближений образуют среднее арифметическое

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}.$$

Этому α_2 , в свою очередь, соответствует лежащее по другую сторону от $\sqrt{a}$ более точное приближенное значение

$$\beta_2 = \frac{a}{\alpha_2}.$$

¹⁾ См. сказанное выше на стр. 47 о последовательности столбцов на обороте текста.

Если в выражение β_2 подставить полученное выше значение a_2 , то получается, что β_2 есть не что иное, как так называемое среднее «гармоническое»

$$\beta_2 = \frac{2a_1\beta_1}{a_1 + \beta_1}$$

между первыми приближениями a_1 и β_1 .

Разумеется, эту процедуру можно продолжать, благодаря чему она уже очень скоро дает очень хорошие приближения для $\sqrt{a}$. Эта процедура известна с классической древности, и я полагаю, что она лежит в основе и данных выше вычислений.

В самом деле, пусть нужно вычислить

$$d = \sqrt{h^2 + w^2}$$

и пусть, как в нашем случае, $h > w$; тогда, очевидно, $a_1 = h$ есть естественное первое приближение. Соответствующим ему приближением β_1 будет

$$\frac{h^2 + w^2}{h} = h + \frac{w^2}{h}.$$

Образуя среднее арифметическое между этими двумя приближенными значениями, получаем сразу же

$$a_2 = h + \frac{w^2}{2h},$$

т. е. формулу (1) нашего текста.

Формулу (2) нашего текста не удастся объяснить столь же просто. В самом деле, ясно, что она вообще не может быть правильной, так как выражение w^2h имеет не первую, а третью степень. Если мы все же попытаемся объяснить это решеие с точки зрения нашей гипотезы о среднем арифметическом и среднем гармоническом, то получится для $a_1 = h$, $\beta_1 = h + \frac{w^2}{h}$ в качестве среднего гармонического выражение

$$\beta_2 = \frac{2h^3 + 2w^2h}{2h^2 + w^2} = \frac{2h^3}{2h^2 + w^2} + \frac{2w^2h}{2h^2 + w^2}.$$

Так как $h > w$, то $2h^3$ значительно больше, чем w^2 , так что $2h^3 + w^2$ не очень резко отличается от $2h^2$ (ср. уже $a_1 = h$). Если мы в знаменателе первого слагаемого для β_2 заменим $2h^2 + w^2$ через $2h^2$, то для β_2 мы получим выражение

$$\beta_2 \approx \frac{2h^3}{2h^2} + \frac{2w^2h}{2h^2 + w^2} = h + \frac{2w^2h}{2h^2 + w^2}.$$

Этими преобразованиями мы достигли по крайней мере того, что получили выражение для корня, состоящее, подобно формуле в тексте, из h плюс еще некоторый поправочный член. Теперь необходимо принять во внимание те специальные числовые значения, которые даны в нашем тексте. Тогда получается по найденной формуле

$$\beta_2 \approx h + 2w^2h \cdot \frac{1}{0;55'}.$$

Теперь надо учесть особенность, относящуюся к области вавилонской вычислительной техники: 55 не является правильным числом, а следовательно, значения $\frac{1}{0;55}$ нельзя взять из таблицы обратных значений. Но, с другой стороны, 0;55 почти равно единице. Если ввести еще это приближение, обусловленное соображениями, относящимися к области чисто вычислительной техники, то получим, наконец, для β_2 выражение

$$\beta_2 \approx h + 2w^2h,$$

т. е. формулу (2) текста.

Разумеется, это второе приближение хуже того, которое получилось бы при правильном расчете ¹⁾, но необходимо иметь в виду, что, с одной стороны, целью подобных текстов является отнюдь не расчет для данного определенного случая, а ознакомление читателя с общим методом решения подобных задач; однако за отсутствием обобщающей буквенной символики такое ознакомление может иметь место всегда только на конкретных числовых примерах. С другой стороны, формула (1) дала уже достаточно отчетливые указания относительно пути решения такого рода задач вообще, так что для объяснения построения формулы (2) для частного случая трудно найти другой удобный путь, кроме предложенного нами. Ведь необходимо отдать себе ясный отчет в том, что всегда к основной задаче присоединяется еще особая задача чисто вычислительного характера, так как таблицы позволяют непосредственно осуществить только определенную группу вычислений. Это переплетение между собой двух проблем и в других случаях нередко затрудняет нам понимание текстов, которые в исторической действительности служили только подкреплением к устной передаче скрытых за ними общих методов.

К области вычисления диагонали — в данном случае диагонали квадрата — относятся также приближенные значения для $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а именно

$$\sqrt{2} \approx 1,25 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0;42,30.$$

Оба приближения можно без труда получить указанным выше способом, как значения α_2 , исходя для $\sqrt{2}$ из $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, а для $\frac{1}{\sqrt{2}}$ из $\alpha_1 = \frac{2}{3}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{0;30^2 - 0;15} \approx 1;30 - \frac{0;15}{2 \cdot 1;30} = 1;25$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0;40^2 + 0;3,20} \approx 0;40 + \frac{0;3,20}{2 \cdot 0;40} = 0;42,30.$$

Необходимые для этих вычислений значения $1;30^2 = 2;15$ и $0;40^2 = 0;26,40$ могут быть взяты непосредственно из обычных таблиц квадратных чисел. При этом необходимо обратить внимание на то,

¹⁾ При точном вычислении получилось бы $\beta_2 = 0;41,12,41, \dots$ (значение α_2 , данное в тексте, вполне верно) и, наконец, $d \approx 0;41,13,51, \dots$

что приближение для $\frac{1}{\sqrt{2}}$ не могло быть получено как обратная величина для $1;25 \approx \sqrt{2}$, так как $1;25$ неправильное число.

Этим, в сущности говоря, и исчерпываются те выводы, которые можно сделать из известного нам до сих пор материала, касающегося нахождения приближенных значений иррациональных квадратных корней. Мне известен еще случай, когда приходится извлекать корень из неквадратного числа. В этом тексте, однако, составитель облегчил себе решение другим путем: он задним числом изменил числовые данные задачи так, чтобы подкоренное выражение стало полным квадратом. То, что в этом случае задача нахождения приближения как таковая обойдена совершенно, объясняется, я полагаю, тем, что в этом втором тексте основная задача состоит вовсе не в нахождении значения иррационального квадратного корня, а исключительно в вычислении некоторых объемов. В этой связи видоизменяется и чисто вычислительная задача, чтобы не приходилось попусту разрепать не относящуюся к делу задачу нахождения приближений. В случаях же, рассмотренных выше, положение вещей было как раз обратным. В этих случаях задачи имели своей прямой и непосредственной целью вычисление тех или иных квадратных корней; в этом случае деление на неправильное число было побочной задачей; вопрос о таком делении был оставлен в стороне, для чего 0;55 заменили через 1. Лишь очень точное знакомство с чрезвычайно обширным текстовым материалом дает достаточное право для того, чтобы делать выводы о математических приемах, применяемых в клинописных текстах. В отдельных изолированных случаях всегда в толковании будет большая доля неопределенности и проблематичности. Однако, несмотря на это, я убежден, что данная выше реконструкция дает в существенных чертах правильную картину.

е) Заключительное замечание.

Хотя мы в настоящей главе, посвященной истории развития вавилонской вычислительной техники, и не входили еще в отдельные черты этого развития, однако мы уже познакомились со множеством самых разнородных и противоречивых явлений, переплетение которых между собой может быть объяснено только исторически. Мы убедились, что от поразительно гибкой системы позиционного счета необходимо подняться к периоду, когда еще отсутствовало сознательное использование позиционного характера числовых знаков. На другом конце развития стоит законченная система таблиц, показывающая нам, как далеко уже продвинулись в это время в области математического овладения новым методом. Несмотря на это, целый ряд вопросов остается открытым. О задаче интерполяции мы могли говорить только в очень узких рамках — для случая извлечения квадратного корня. Вопрос о делении на неправильные числа до сих пор остается совершенно невыясненным. Наконец, мы познакомились с целым классом таблиц, как, например, таблицы для $n^2 + n^3$, значение которых в рамках вавилонской математики станет нам понятным только в последней главе на основе детального исследования собственно

математических текстов. Но прежде чем мы обратимся к этим чисто математическим текстам, нам необходимо предварительно разобратся в вопросе, каким путем вавилонская математика пришла к своей позиционной системе чисел, оказавшей решающее влияние на всю технику счета, благодаря чему ее существование оказывается основной предпосылкой для столь высокого развития математики в Вавилоне. Ниже мы увидим, что эта математика имеет сильно выраженную алгебраическую ориентировку, тогда как, с другой стороны, в египетской математике мы познакомимся с совершенно иным типом возможностей математического развития. Если мы не хотим ограничиться при изучении этих явлений поверхностным знакомством с чисто внешними фактами, то нам необходимо очень глубоко проникнуть в те исторические предпосылки, которые лежат в основе всех этих внешних проявлений. Это обстоятельство вынуждает нас в следующей главе далеко отступить от нашей темы и заняться разбором большого числа совершенно нематематических вопросов. Однако этот разбор совершенно необходим для действительного понимания тех сил, деятельностью которых была обусловлена чрезвычайно пестрая картина, которую представляет собою античная математика в ее окончательном виде. В истории античного математического мышления мне кажется особенно привлекательным именно то, что здесь мы не можем ограничиться изучением изолированной истории отдельной научной дисциплины, так как в античной математике решающее значение имеет еще связь ее с другими процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ I.

Этот указатель, как и все указатели литературы в конце отдельных глав, не имеет целью дать полный список всех относящихся сюда работ. Я привел все те труды, которые мне показались существенными для соответствующих разделов или которые содержат указания на дальнейшую литературу вопроса.

Цифры, стоящие перед каждой работой, сохраняются за ней на всем протяжении нашей книги. Если такие цифры стоят в круглых скобках после сокращений, то это означает, что соответствующее сокращение объяснено в списке литературы в конце той главы, которой соответствует римская цифра.

а) К главе I в целом.

(I, 1) МКТ (V, 4), гл. I. Здесь сопоставлены все известные мне тексты в систематическом порядке, причем они публикуются и комментируются со всеми подробностями.

б) К § 1.

К в (I, 2): Neugebauer, Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung IV, QS B 2 (V, 1), стр. 199 и сл.

К г (I, 3): Neugebauer, то же, III, QS B 1 (V, 1), стр. 458 и сл.

в) К § 2.

К б (I, 4): Neugebauer, Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung I и II, QS B 1 (V, 1), стр. 183 и сл.; 452 и сл.

К д (I, 5): Neugebauer, Über die Approximation irrationaler Quadratwurzeln in der babylonischen Mathematik, AfO (V, 2) 7, стр. 90 и сл. [Содержащиеся в этой статье замечания относительно вавилонского написания нот, как показал Ландсбергер (Landsberger, Oppenheimer-Festschrift, 1-й дополнительный том к AfO (V, 2)), оказываются неверными.]

ОБЩАЯ ИСТОРИЯ. ЯЗЫК И ПИСЬМО.

§ 1. ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ И ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР.

В настоящей главе мы ставим себе целью в самых кратких чертах охарактеризовать географическую и хронологическую обстановку, в которой развились культуры, математическое мышление которых мы здесь хотим подвергнуть изучению. При этом наша цель — дать здесь лишь приблизительное толкование тех исторических понятий, о которых мы в дальнейшем будем неоднократно упоминать. Всякая работа над отдельными вопросами потребовала бы, разумеется, значительно более точной ориентировки во внешних исторических событиях, чем это возможно в нашей книге.

Благодаря археологическим исследованиям последнего столетия, нам стало известно огромное множество интересных исторических процессов в истории ближнего Востока, охватывающих целых четыре тысячелетия. Кто хочет попытаться сказать что-либо хотя бы о важнейших понятиях, характеризующих историю Месопотамии и Египта, тому придется в сущности изучать взаимодействие и взаимопроникновение различнейших течений и явлений. Какое бы отдельное важное течение мысли в эту эпоху мы ни избрали объектом исторического исследования, нам придется, для того чтобы действительно его понять, привлечь к изучению все указанные выше факты.

Наше знакомство с материалом по древней математике носит еще слишком случайный и отрывочный характер, чтобы могла быть речь о действительно стройном и законченном историческом изображении. Мы можем стремиться в лучшем случае лишь к тому, чтобы уяснить себе в самых общих чертах основные линии развития и важнейшие силы, определяющие его. При таком положении вещей пуждается в оправдании не то, что мы здесь касаемся внешних исторических событий, а скорее, наоборот, тот факт, что мы эти события излагаем в столь необработанной и схематической форме, как это имеет место на нижеследующих страницах.

С другой стороны, необходимо заметить, что те явления, которые мы хотим обрисовать в этих лекциях, имеют широкое, принципиальное значение и вообще для истории возникновения человеческих идей. Существенным отличием математики является то, что в ней можно значительно более четко, чем в других процессах умственной жизни, указать, о каких понятиях и каких средствах их выражения идет речь. Я твердо убежден в том, что те же явления, развитие которых мы кратко проследим здесь, изучая историю образования математических

понятий, по существу лежат в основе всякого исторического развития. В этом глубоко закономерном параллелизме я вижу добавочное обоснование правомерности занятия историей математических идей.

Хронологическая таблица для интересующего нас периода дана на рис. 13, тогда как рис. 14 изображает географическую арену этих событий. Отнесение событий к тому или иному времени на хронологической таблице рис. 13, разумеется, имеет лишь схематиче-

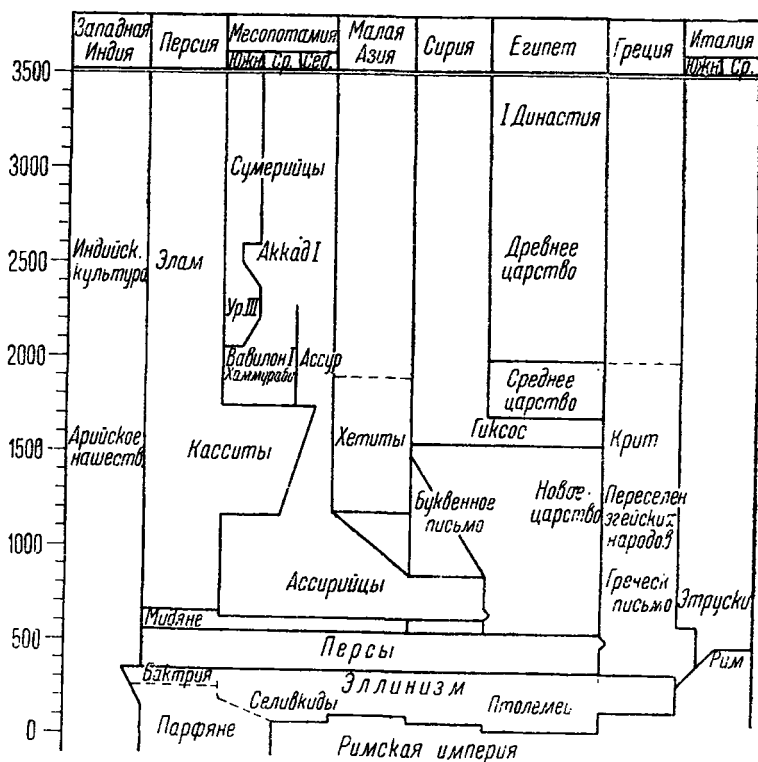


Рис. 13.

ский характер: в нее внесены лишь те отдельные факты, которые необходимы для приблизительной исторической ориентации важнейших отделов нашей работы.

Изучение рис. 13 мы начнем с левого вертикального столбца, где вследствие раскопок Джона Маршалля в местностях Хараппа (Harappa) и Мохенджо-даро (Mohenjodaro), имевших место в последние годы, обнаружены остатки периода культуры, относящегося к третьему и четвертому тысячелетиям (следовательно, предшествующего классической древнеиндийской культуре). Вопрос о связи этой культуры с культурой Двуречья, быть может, раньше или позже приобретет значение для решения общего вопроса о связи между западной и во-

сточной азиатскими культурами¹⁾. Как раз для истории математических проблем здесь открывается обширный и совершенно непочатый круг вопросов. Индия появляется неоднократно на исторической сцене развития средиземноморских культур и как дающая и как получающая. Последнее и решительное ее появление в области европейской культуры ознаменовалось открытием настоящей позиционной системы — той, которой мы пользуемся поныне, т. е. введением абсолютного позиционного значения благодаря присоединению особого знака для нуля. Известно, что посредниками в передаче этого нововведения были арабы. Однако до сих пор неясно, насколько далеко вглубь

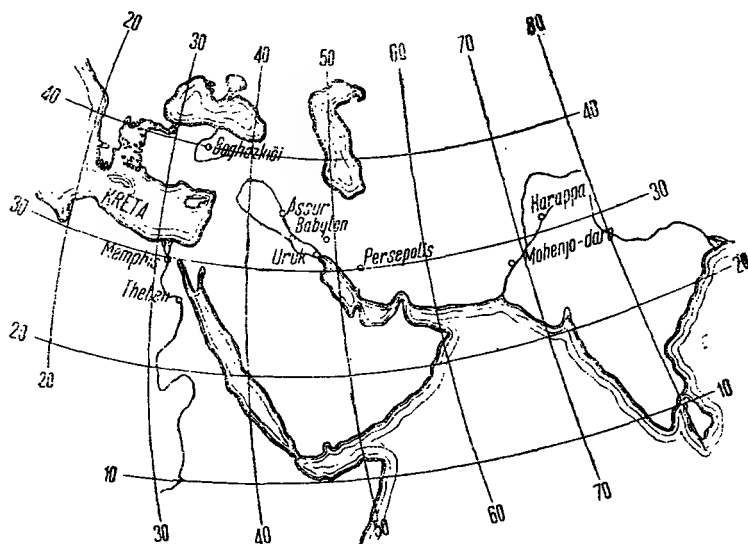


Рис. 14.

веков можно отодвинуть это индийское открытие (теперь обычно принято отнести его к середине первого века п. э.). Еще совершенно не выяснено, был ли первый толчок к этому открытию дан вавилонской позиционной системой, например в ее астрономическом применении. Точно так же мы совершенно не в состоянии сказать, какую роль в этих процессах играли эллинистические государственные образования, т. е. в первую голову Бактрия. Полным мраком неизвестности окутано все, что относится к сношениям между Месопотамией и долиной реки Инда ранее первого тысячелетия до н. э. Для

¹⁾ Из культуры Хараппа и Мохенджо-даро до нас дошли и памятники письменности (важнее всего дошедшие до нас печати); к их расшифровке сделаны пока только первые шаги (ср. по этому вопросу P. Meriggi, *Zur Indus-Schrift*, *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, N. F., 12, 1934, стр. 198 и сл.; важнейшая работа: Sir John Marshall, *Mohenjo-daro and the Indus Civilisation*, тт. 1—3, Лондон 1931). Датировка основана на нахождении сходных печатей в Месопотамии в слоях, принадлежащих к середине третьего тысячелетия.

этой цели придется прежде всего глубже, чем это делалось до сих пор, изучить историю и культуру Элама, т. е. той области, где ныне находится юго-западная Персия. Все, что нам известно, — это отношения между Эламом и соседними месопотамскими государственными образованиями¹⁾.

Долина рек Евфрата и Тигра была, повидному, уже с древнейших времен населена в южной своей части сумерийским народом, а далее к северу семитическими народностями, к которым все время прибывали новые волны переселенцев из семитических областей Аравии. То, что сумерийцы не были ни семитами, ни индоевропейцами, видно особенно ясно из их языка, структура которого совершенно иная, чем в обеих указанных языковых группах. На этом частном вопросе мы остановимся ниже подробнее. Сумерийской областью является, в сущности, только нижнее течение и дельта обеих рек — Евфрата и Тигра, т. е. приблизительно область, простирающаяся от южного Багдада до Персидского залива, — следовательно, район, примерно равный по величине трем четвертям Дании. Мы знаем — прежде всего благодаря археологическим исследованиям последних лет, — что в этой области примерно за 3000 лет до н. э. [I династия из Ура, названная так по главному городу²⁾] достигла неожиданного расцвета культуры, впоследствии послужившая основой для всего дальнейшего развития культуры Двуречья³⁾. Это дальнейшее развитие обусловлено постоянно изменяющимися взаимными отношениями между сумерийцами и семитами. Третье тысячелетие характеризуется все прогрессирующей семитизацией Вавилонии⁴⁾, которая заметна в постоянном чередовании политического господства этих двух национальных групп и кончается приблизительно около 2000-го года полной победой семитов и исчезновением сумерийского этнического элемента. Эту семитическую часть населения называют аккадцами по находящемуся недалеко от Вавилона городу Аккаду, в котором господствовала первая семитическая династия (основатель — Саргон). Высшего расцвета этот «древневавилонский» период достиг при знаменитой первой династии в Вавилоне, самым выдающимся представителем которой был Хаммураби. К слову сказать, сборник законов Хаммураби («Codex Hammurabi») был поворотным пунктом во всей истории древневосточного права.

¹⁾ Каких больших результатов можно еще ожидать от систематических раскопок, видно, например, из того, что при последних раскопках Oriental Institut of the Chicago University в Персеполе в двух маленьких кладовых крепостной стены найдено 30 000 клинописных табличек, из которых две трети совершенно или почти совершенно неповрежденных. Разумеется, необходима работа многих лет, чтобы этот огромный материал стал доступным для научного изучения.

²⁾ См. карту, рис. 15 на стр. 65.

³⁾ Вопрос о том, действительно ли под понятиями «сумерийцы», «сумерийский» разумеется что-то однородное и нет ли и здесь в свою очередь различных этнических слоев, лежащих друг на друге, нам нет нужды здесь касаться. Все процессы такого рода произошли во всяком случае много ранее того периода, который представляет интерес для развития собственно математической литературы.

⁴⁾ Слова «Вавилония» и «вавилонский» здесь и в большей части дальнейших мест употребляются как чисто географические понятия.

С растворением сумерийской части населения в семитской роль сумерийского элемента еще отнюдь не окончилась. Сумерийцы были изобретателями системы письма, называемой «клинописью», которая в течение трех тысячелетий оставалась господствующей в Месопотамии и которая с известными видоизменениями была перенята восточными, северными и западными ее соседями. Всемирную известность получила так называемая амарнская переписка, т. е. найденный в Эль-Амарне, в Египте, архив переписки между вавилонскими и египетскими властителями в середине второго тысячелетия, показывающий, что и в Египте умели читать клинопись.

Двуречье потеряло на долгое время политическую самостоятельность, подпав под власть кассеев, или касситов, народности из примыкающих с востока горных областей. Последняя фаза истории Месопотамии характеризуется приходом ассирийцев. Их язык является диалектическим вариантом аккадского. Историю самостоятельного ассирийского государства (центр — город Ассур на среднем Тигре, но владения ассирийцев простирались далеко в глубь горных областей Армении), поддерживавшего более или менее оживленные сношения с Вавилонией, можно проследить на протяжении примерно 2000 лет. Всем известно, как в последние годы ассирийской истории Ассирийское царство добилось политической роли великой державы; по покорении Сирии и Палестины Ассирия на некоторое время расширила свои границы до Египта и Черного моря.

Для истории ближнего Востока особенно важны два основных направления движения различных национальных групп. Это — с одной стороны, семитизация, исходящая из Аравии и распространившаяся уже в древнейшее время на Египет, Палестину, Сирию и Двуречье; в более позднее время она ознаменовалась движением арамейцев, а в гораздо более позднее время — движением арабов на север. С другой стороны — это напор с севера все новых и новых полчищ из центральной Азии, частью кружным путем через Персидское плоскогорье, частью через Кавказ, Малую Азию и острова Эгейского моря в Месопотамию и Средиземноморье. Это постоянное перелетание различнейших культур придает истории передней Азии и восточной части Средиземноморского бассейна ее характерный колорит. Одним из самых важных государственных образований, возникших благодаря пришедшим с севера индо-европейским национальным элементам, было хетитское.

Усвоив клинопись, хетиты сыграли выдающуюся роль в распространении месопотамской культуры далеко на запад, вплоть до западной Малой Азии. К числу этих великих переселений народов, направленных с севера, относятся также *переселения народов эгейской группы*, характеризующие конец критской культуры; одним из этих переселений было и переселение дориа около 1200 г. до н. э.

Замечательно, что Египет не был затет всеми этими великими движениями. Лишь приблизительно между 1700 и 1600 гг. до н. э. удалось пришедшим из Сирии «ипоземцам» — «гиксосам» — достичь на сравнительно короткое время господства над Египтом. За изгнанием гиксосов следует широкая экспансия Египта в эпоху так называемого «Нового царства», благодаря чему власть Египта временно простирается

вплоть до верхнего течения Евфрата. С этого времени борьба за обладание сирийским побережьем определяет дальнейшую внешнюю историю Египта. Часть этих событий отразилась в библейских рассказах в виде характерных колебаний мелких государств Палестины между попытками добиться политической независимости и подчинением то Египту, то ассирийскому господству.

По обычаю, унаследованному уже от древности, египетскую историю делят на династии, начиная с I династии, впервые объединившей обе части страны — Верхний и Нижний Египет — под одним руководством. III династия представляет собою высший расцвет «Древнего царства», время строителей пирамид. Внутренний переворот отделяет Древнее царство от «Среднего царства» (XII и XIII династии). Затем следуют династии ликсосов, а затем XVIII династия, с которой начинается «Новое царство».

Система письма, применявшаяся в Египте вплоть до времен Римской империи, была (по крайней мере, поскольку речь идет о надписях на памятниках) пероглифической. Немногом раньше этого времени, приблизительно около середины четвертого тысячелетия, возник пероглифический шрифт и в сфере шумерийской культуры; из этого шрифта путем постепенной линеаризации знаков возникла система письма, называемая «клинописью». Чрезвычайно важный шаг вперед в истории письма вообще — переход от имеющих чрезвычайно большое количество знаков систем письма египетской и вавилонской культурной сферы к чисто буквенному письму с очень небольшим числом буквенных знаков условного характера — произошел в прибрежной полосе Сирии примерно во второй половине второго тысячелетия. Приблизительно между 1000 и 800 гг. эта система письма, применявшаяся главным образом финикийцами, была перенята греками и стала, таким образом, исходным пунктом для всех позднейших систем буквенного письма¹⁾.

В середине первого тысячелетия до н. э. начинает подготовляться перемещение центра тяжести развития античной истории на запад, в собственно Средиземноморье. Определяющими моментами предшествующего периода были, с одной стороны, два культурных центра в Египте и Месопотамии, а с другой — великое переселение народов, вызванное рядом передвижений племен частью из Аравии, частью из центральной Азии. На новом этапе развития, который мы собираемся сейчас вкратце охарактеризовать, как Египет, так и Месопотамия теряют свое выдающееся положение, уступая его новым государственным образованиям. С другой стороны, приток все новых и новых сил из переднюю Азию прекращается; паолоборот, начинается экспансивное развитие государств Средиземноморья, приводящее, наконец, к столь устойчивому образованию, как Римская империя.

Первым толчком к этому развитию послужили события на территории нынешней Персии. Верховенство ассирийцев было сломлено около 600 г. принадлежавшими к индоевропейской группе мидянами, сфера влияния которых простиралась уже далеко в направлении к Малой Азии. Вскоре их сменили персы, также принадлежавшие

¹⁾ Ср. по этому вопросу также ниже, стр. 90.

к индоевропейцам; персы подчинили своей власти почти всю область древних восточных культур, т. е. все ассирийское царство и даже Египет. Попытка продвинуться в область греческого Архипелага — так называемые «Персидские войны», — как известно, окончилась неудачей. Для дальнейшего развития преобладающее значение имеет длившееся приблизительно два столетия господство персов над ближним Востоком. Благодаря систематической административной и политической организации выросло огромное международное государственное образование, явившееся важной предпосылкой для походов Александра, а следовательно, и для эллинизма в Римской империи. Александр Великий сознательно принял в наследство это великое государство, отказавшись от предложения Дария разделить бывшую персидскую территорию между западным, македонским и восточным, персидским царствами. Сам Александр хотел даже перенести столицу своего царства в Вавилон. Это положение вещей, однако, все более изменялось в связи с разделом царства Александра, последовавшим вскоре после его смерти. Правда, на западном плоскогорье еще долго продолжало существовать греческое государство Бактрия; но, несмотря на это, месопотамское царство Селевкидов (названное так по Селевку, одному из полководцев Александра) вскоре оказалось восточной границей эллинистической системы государств. Египет также стал под властью Птолемеев снова играть самостоятельную роль, если обращать внимание только на внешнюю сторону явлений, то войны между Птолемеями и Селевкидами повторяют политическую ситуацию эпохи «Нового царства». Однако если мы подойдем к этому вопросу с точки зрения истории культуры, то собственно определяющим моментом для дальнейшего развития окажется общая всем этим областям греческая культура.

В последней фазе античной истории доминирующую роль играет экспансия Рима. И в этом случае определяющие силы имеют свой источник: еще в далеких временах древнего Востока. Финикийская государственная организация, которая дает о себе знать уже во второй половине второго тысячелетия н. втянув в свою орбиту Сицилию и Карфаген, достигает далеких пределов Испании и южной Франции, вовлекает постепенно в сферу этого развития весь Средиземноморской бассейн. Прошедшая во втором тысячелетии через Малую Азию волна переселения народов имела одним из своих последних ответвлений вторжение этрусков в Италию. Общеизвестно, как Рим, начиная с 500 г., постепенно распространяет свою власть на среднюю и южную Италию, затем вступает в конфликт с карфагенянами и, наконец, становится наследником владычества Птолемеев и Селевкидов. Лишь парфяне положили предел дальнейшему распространению римского владычества на восток; так что, наконец, граница между Римской империей и дальним Востоком стала проходить по Месопотамии. В ходе дальнейшего исторического развития эта граница явилась демаркационной линией между европейской культурой Средиземноморья и сферой самостоятельного азиатского развития. Лишь по прошествии целой тысячи лет благодаря арабам эта демаркационная линия снова существенным образом переместилась, вследствие возникновения системы государств, объединившей вместе северную Африку, переднюю

Азию, Персидское плоскогорье и переднюю Индию. И это образование имеет свои корни в историческом развитии второго тысячелетия до н. э.

Для истории догреческого периода мы в дальнейшем займемся в первую голову Вавилонией, так как там столкновение сумерийцев и семитов дало повод как раз к тем явлениям, которые решительным образом повлияли на тип всей догреческой математики. Наш относящийся сюда материал заимствован из источников, относящихся к самым различным периодам вавилонской истории, главным образом эпохи Хаммураби и касситов, и доходящих до времени Селевкидов.

Дошедшие до нас клинописные тексты (имею в виду, главным образом, собственно математические тексты), по видимому, ни в одной своей части не древнее династии Хаммураби. Как раз наиболее интересные и важные тексты относятся к этому промежутку времени, но ни один текст не относится к предшествующим стадиям развития. Поэтому до сих пор невозможно реконструировать настоящую историю развития этого типа текстов. Тем не менее существование такой истории для времени до Хаммураби необходимо постулировать, подобно тому как и в истории развития вавилонского права система, дошедшая до нас от династии Хаммураби, т. е. в первую голову «Кодекс Хаммураби», представляет собою последнюю страницу в развитии древневавилонского права, идущем от первой аккадской династии. Прилагаемая карта имеет целью указать местоположение важнейших поселений, в которых разыгрывались указанные здесь исторические события (рис. 15). Все математические клинописные тексты происходят из Месопотамии, главным образом из Урука, Киша и Ниппура; однако их находят и в других местах почти при каждом раскопке. Только один текст (математические таблицы) происходит из Суз, но не может быть сомнения в том, что по крайней мере вавилонский способ счета (а, значит, также и математические таблицы) был распространен на столь же широком пространстве, как и клинопись и шестидесятеричная система чисел, — следовательно, не только до Элама, но и до Армении, Малой Азии и Сирии ¹⁾.

¹⁾ Крайнюю шаткость датировки табличек с математическими текстами следует приписать тому обстоятельству, что эти таблички имеют своим источником по большей части не систематические раскопки, а хищнические раскопки арабов (это безобразие носит название «торговля древностями»). Распыление первоначально органически связанного между собой материала по самым различным музеям еще более запутало первоначальное положение вещей. К этому надо добавить еще то, что только большие музеи, и то лишь очень немногие, имеют лишь какое-то подобие инвентарей хранящихся у них табличек. Какое это имеет значение, когда часто такие музеи обладают массами текстов во много десятков тысяч, думаю, ясно. Таким образом привлеченные мною источники являются по существу результатом случайных находок в музеях. Да и самые тексты находятся часто в очень печальном состоянии. Если их хотят хранить вне климатических условий Месопотамии, то необходимо подвергнуть их химической очистке, чтобы разрушить осадки солей на табличках. Тексты, не подвергшиеся такой консервации, превращаются в пыль за несколько лет; так, например, целый ряд текстов в Стамбуле уже совершенно невозможно разобрать. Неудовлетворительные заметки, сделанные при опубликовании их непосредственно после раскопок, — вот все, что от них осталось. Если к этому прибавить еще, что некоторые музеи делают секрет из своих табличек и боятся всякого постороннего глаза, то крайняя отрывочность наших знаний о вавилонской математике не покажется уже удивительной.

1 —	Basra
2 Eridu	Abū Shahrein
3 Ur	el Mukajjar
4 ?	el'Obeid
5 Larsam	Senkereh
6 Uruk (Erech)	Warka
7 Lagas	Tell Lā (Tello)
8 Šuruppak	Fārah
9 Kisurra	Abū Hatab
10 Susa	—
11 Nippur	Nuffar
12 Isin	Tell Sibtije (?)
13 Borsippa	Birs Nimrād
14 Babylon	—
15 Kiš	el Ohaimir
16 ?	Djemdet Nasr
17 Sippar	Abū Habbā
18 Akkad	—
19 Seleucia-Ktesiphon	Tak i Kisra
20 —	Baghdad
21 —	Samarra
22 Arrapha	Kerkūk
23 Assur	Kal'at Šerkāt
24 Hatra	el Hadr
25 Kalhu	Nimrud
26 —	Mosul
27 Ninija (Ninive)	Kujungik
28 Dūr Šarrukīn	Horsābād
E Euphrat	
T Tigris	

Abū Habbā	17	Ktesiphon	19
Abū Hatab	9	Kujungik	27
Abū Shahrein	2	Lagas	7
Akkad	18	Larsam	5
Arrapha	22	Mosul	26
Assur	23	el Mukajjar	3
Babylon	14	Nimrud	25
Baghdad	20	Ninive	27
Basra	1	Nippur	11
Birs Nimrād	13	Nuffar	11
Borsippa	13	el'Obeid	4
Djemdet Nasr	16	el Ohaimir	15
Dūr Šarrukīn	28	Samarra	21
Erech	6	Seleucia	19
Eridu	2	Senkereh	5
Fārah	8	Sippar	17
el Hadr	24	Šuruppak	8
Hatra	24	Susa	10
Horsābād	28		
Isin	12	Tak i Kisra	19
Kal'at Šerkāt	23	Tell Sibtije	12
Kalhu	25	Tello	7
Kerkūk	22	Ur	3
Kiš	15	Uruk	6
Kisurra	9	Warka	6

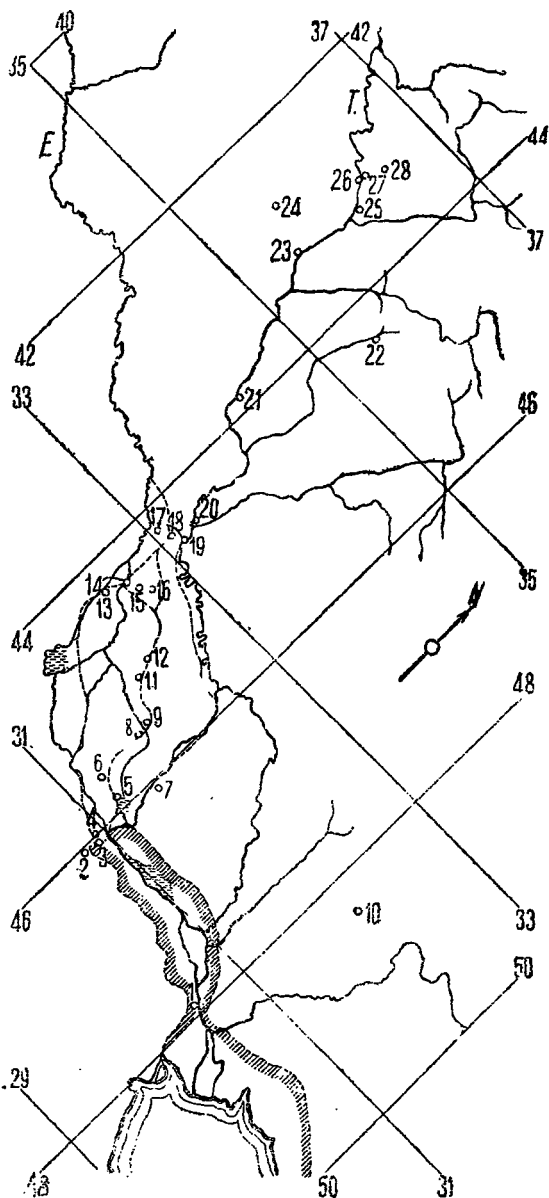


Рис. 15. Русла рек и очертания морских берегов, восстанавливаемые предположительно, обозначены пунктиром. Номера населенных мест идут, возрастая с юга на север. Нынешние географические названия набраны курсивом.

§ 2. ПРИНЦИП КЛИНОПИСИ.

Целью наших дальнейших сообщений будет описание характерных особенностей математической терминологии математических клинописных текстов. Для этого нам придется, однако, начать издалека, познакомя читателя с системой клинописного письма в целом. Сперва мы кратко обрисуем чисто внешний вопрос о технике письма, затем историю развития системы письма, следовательно, вопрос о значении отдельных знаков, и, наконец, мы исследуем, в какой связи стоят эти вопросы со структурой того и другого языка — сумерийского и аккадского. Лишь затем мы сможем перейти непосредственно к математической терминологии. Во избежание всевозможных недоразумений необходимо прямо заявить, что все следующие разделы отнюдь не задуманы как некий внешний привесок, имеющий целью кое-как, более или менее по-дилетантски ознакомить непосвященных с клинописью. Дело обстоит совсем не так. Мы убедимся, что различные возможности выражения мысли, заключенные в клинописной системе, оказали существенное влияние на ход математического развития, так что ближайшие отделы нашей книги столь же мало выходят из ее рамок, как картина возникновения языка математических знаков при изложении истории математики какой-либо другой эпохи. С другой стороны, нужно отметить, что специальная задача нашей книги позволяет нам ограничиться схематическим изложением абсолютно существенного на нескольких типичных примерах. Фактическое положение вещей оказывается в этих случаях часто гораздо более сложным; но разбор этих особенностей — дело специалистов-ассириологов и, разумеется, не входит в нашу задачу.

а) Техника письма.

Сотни тысяч текстов, ставшие известными при раскопках приблизительно последних 70 лет, представляют собой глиняные таблички, иногда также глиняные призмы, в которых выдавлены клинописные знаки при помощи палочки с острыми ребрами (по большей части из бамбука или кости). После нанесения надписи эти таблички частью высушивались на воздухе, частью подвергались обжиганию. В настоящее время мы уже можем составить себе представление о ходе развития, придавшем этой системе письма тот своеобразный характер, который обозначается словом «клинопись». Древнейшие из известных нам текстов, которые, повидимому, восходят к середине четвертого тысячелетия, имеют еще всецело характер изображений. Контуры фигур здесь выпарапаны в глине. Детали, как, например, перья у птиц и т. д., намечены штриховкой или разрисовкой другого рода. Постепенно линеаризация этих изображений все усиливается, а разрисовка получает условно упрощенный характер. В конце концов все контуры оказываются состоящими только из прямолинейных отрезков. Каждая отдельная из этих линий, естественно, имеет в начале больший нажим, а к концу становится все тоньше. Таким образом эти изображения распадаются на отдельные «клинья». Заимствование

акнаднями сумерийского письма приводит, с одной стороны, к уменьшению числа знаков, а с другой — к последовательному условному регулированию расположения отдельных клиньев. Благодаря этому письмо совершенно теряет свой первоначальный характер изображений и всецело превращается в систему знаков, состоящих уже только из клиньев и отпечатков от надавливания косо поставленной палочки, которые мы называем «угловатыми крючками» (Winckelhaaken) (рис. 16) ¹⁾.

Клин и угловатый крючок являются, как было уже замечено вначале, теми элементами, из которых составляются вавилонские числовые знаки. Эти числовые знаки также имеют долгую историю развития. В сумерийских текстах числовые знаки выдавлены палочкой не с треугольным, а с круглым сечением. Если такую палочку держать в естественном косом положении, то получается оттиск, слева углубленный,

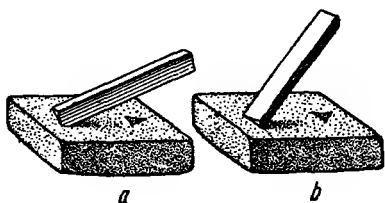


Рис. 16.

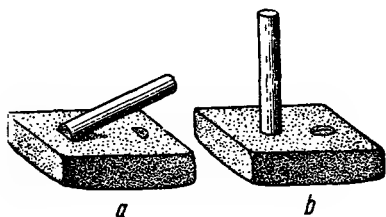


Рис. 17.

а справа ограниченный половиной дуги эллипсиса (рис. 17, а). Таким способом пишутся числа до 9 (ср. рис. 18, средний вертикальный столбец, в котором в направлении снизу вверх начертаны единицы от 1 до 9) ²⁾. Десятки получаются путем нажима круглой палочки, стоящей вертикально, поэтому они имеют в очертании круг (рис. 17, б, а также рис. 18, правый верхний угол). Постепенно стали и при написании числовых знаков переходить на палочку с острыми ребрами; при этом единицы имели вид отдельных лежащих или стоячих оттисков, т. е. «клиньев» (рис. 16, а), десятки получались путем вдавливания вертикально стоящей палочки, в результате чего получались знаки, вроде изображенных на рис. 19, или же косо поставленной, в результате чего получались «угловатые крючки» (рис. 16, б) ³⁾.

Уже выше (стр. 51) мы заметили, что первоначальные пиктографические изображения подверглись повороту на 90° (в направлении

¹⁾ Изображения палочек см., например, у Langdon, Excavations at Kish, т. I, Париж 1924, табл. XXIX. Наш рис. 16 представляет собой, разумеется, только схему, равно как и рис. 17. Древнейшие формы «клинописи», которые в действительности были еще изображениями в узком смысле слова (такое письмо называется также «пиктографическим»), сделаны еще не палочкой, имеющей клиновидное сечение, а остроконечным грифелем, которым выцарапывали изображения на глине.

²⁾ Этот текст происходит из Фара, древнего Шуруппак (Šurupak); он написан примерно за 3000 лет до н. э.

³⁾ Такие «угловатые крючки» для 10 нетрудно, например, различить на рис. 12, стр. 51, у левых боковых сторон обоих изображений прямоугольников.

против часовой стрелки), как это ясно из рис. 22 на стр. 70. Причина этого в том, что древнейшие тексты, написанные пиктографически,



Рис. 18.

были расположены по вертикальным столбцам, следующим друг за другом справа налево, при этом отдельные изображения имели естественное вертикальное положение (ср. схему на рис. 20, а также рис. 21)¹⁾. Но написание текста вертикальными столбцами, направляемыми, следовательно, к пишущему,

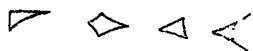


Рис. 19.

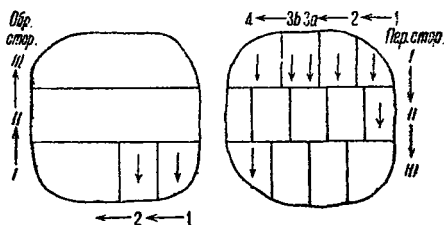
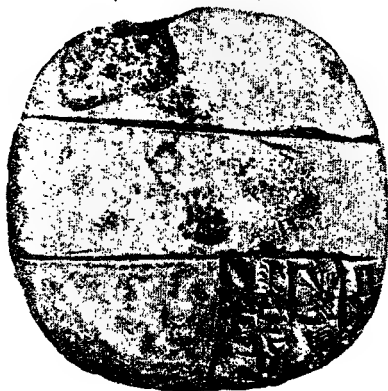


Рис. 20.

чрезвычайно неудобно для руки, так что при написании приходится повернуть текст так, чтобы фактически приходилось писать горизон-

¹⁾ Отдельные вертикальные столбцы таких древних текстов совсем коротки, часто они состоят даже только из одного знака. Каждый столбец помещен в отдельной ячейке, иногда два столбца помещаются в одной и той же ячейке; такие ячейки следуют одна за другой справа налево и образуют горизонтальные полосы. При повороте направления письма на 90° получаются вертикальные полосы (начинающиеся на передней стороне слева) с горизонтальными строками в них, написанными слева направо (поворот рис. 21 на 90° в направлении против часовой стрелки дает схему рис. 40, стр. 46).

тальными строками, идущими слева направо, с лежащими изображениями. Это направление письма становится, в конце концов, направлением, в котором писались тексты. Это произошло тогда, когда отдельные знаки уже потеряли свой пиктографический характер.

*Обратная сторона**Передняя сторона*

I

II

III

Рис. 21.

Как уже было замечено выше, из способа нанесения надписей на памятники можно непосредственно заключить, что направление, в котором читали их, изменилось.

б) Система письма в клинописных текстах.

Как можно заключить из многочисленных дошедших до нас форм архаических знаков, знаки клинописи возникли постепенно из пиктографических (рис. 22). В промежутке от первых зачатков сколько-нибудь систематизированного пиктографического письма — приблизительно около середины четвертого тысячелетия — до формирования письма, состоящего из условных знаков, не только очертания этих знаков, но и их значение и их роль в системе письма подверглись долгому и разнообразному развитию. Результатом этого было то, что система письма, например во время первой вавилонской династии, а следовательно, и вся позднейшая система клинописи, отличается очень сложной структурой. В дальнейшем будет показано, откуда взялось это чрезвычайное богатство форм и значений и какие характерные особенности возникают в результате различных возможностей письменного выражения мыслей.

Для этой цели нам придется охарактеризовать большое число различных переплетающихся между собой явлений. Эти явления разделяются на две группы: первая (которую мы будем в этом разделе изучать, исходя из схемы на стр. 71) относится к системе письма вообще. Мы видим, что один и тот же комплекс знаков (именно так называемые «клинописные знаки») был использован для трех

принципиально различных систем письма: 1) для сумерийской системы письма, 2) для аккадского слогового письма и 3) для аккадского идеографического письма. Вторая группа дает представление об исторических предпосылках этого развития системы письма (см. раздел в). Затем мы скажем еще о том, что первыми изобретателями этого письма не были аккадцы: свою «клинопись» они переняли у сумерийцев. При этом обнаружится, что только глубокое структурное различие между языком сумерийцев и языком семитических аккадцев является причиной того, что из сумерийской системы письма в конце концов было сделано то своеобразное применение, о котором мы сейчас будем говорить.

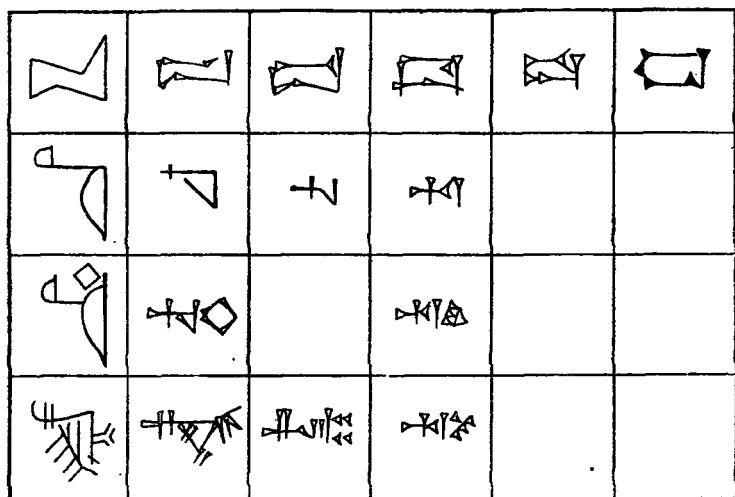


Рис. 22.

1. Ближайшей целью нашего изложения является объяснение одного явления, сделавшего расшифровку клинописи столь невероятно мучительным и трудным делом. Я имею в виду то обстоятельство, что часто некоторые знаки имеют очень большое число значений, так, например, один и тот же знак может быть прочтен и как DU, и как RA, и т. д., т. е. что с одним знаком часто связана возможность двадцати или даже более различных произношений. И, наоборот, может случиться, что для одного и того же комплекса звуков, например для одного и того же DU, существует большое количество различных возможностей написания. В связи с этим будет указано, по каким принципам поступают при транскрипции клинописных текстов и какое значение имеют в наших современных написаниях для передачи клинописных знаков чередующиеся между собой прописные и строчные буквы, а также значки и ударения.

Мы начнем при разборе схемы, находящейся на стр. 71 (рис. 23), с правой верхней части. Здесь дан вполне определенный клинописный знак, именно знак, изображавший первоначально человеческую го-

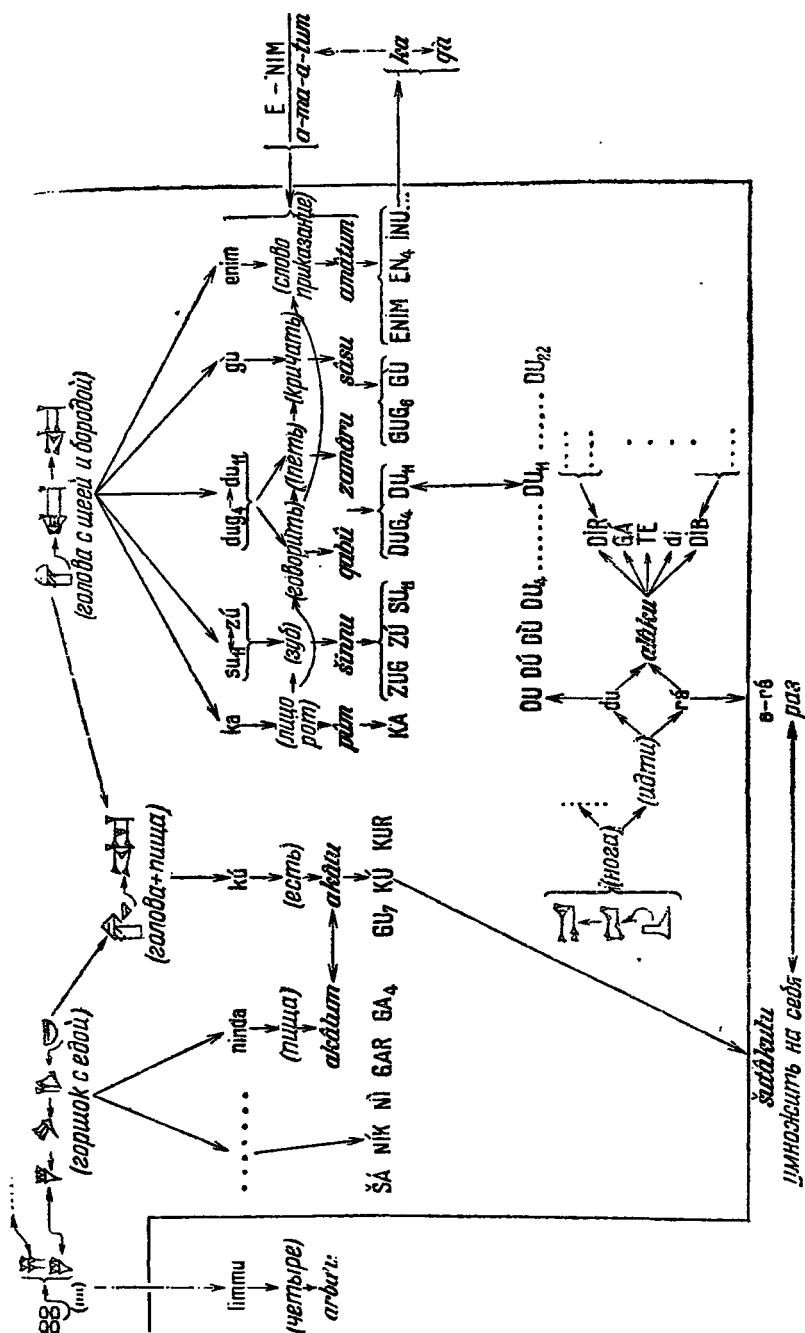


Рис. 23.

лову с бородой и шеей. История чисто графического преобразования этого знака не интересует нас в этой связи. Для нас достаточно указать на то, что в клинописной форме, после поворота направления чтения на 90° (на рисунке это обозначено изогнутой стрелкой), этот знак, наконец, принимает условную форму, на которую указывает прямая стрелка¹⁾.

Все, о чем мы будем говорить в ближайших строках, относится только к одному этому знаку. Мы ставим себе целью выяснить, каким образом одному такому знаку соответствует целый ряд значений и звуковых комплексов. При этом мы, разумеется, будем исходить из значения первоначального изображения. Из него непосредственно понятно, что знак этот может употребляться для обозначения понятий: «лицо, рот». Соответствующим шумерийским словом будет *ka*, а аккадским — *rimt*. Это надо понимать в том смысле, как если бы изображение лошади показали англичанину и французу. Англичанин прочел бы «horse», а француз — «cheval». Соответственный смысл имеют три первые строки нашей схемы: понятие, данное в средней строке, звучит в шумерийском так, как указано в первой строке, а в семитическом аккадском — так, как читается в третьей строке.

Сперва мы проследим изменение значения нашего знака, вызванное только изменением содержания понятия. Сперва из понятия «лицо, рот» при помощи своеобразного образования *pars pro toto* получается значение «зуб», затем при помощи изменения в сторону абстрагирования получаем понятие «говорить», это значение в свою очередь изменяется в значение «петь» и «кричать», а затем идеализируется еще дальше в «слово, приказание».

Соответствующие шумерийские слова можно найти в нашей схеме. При этом надо обратить внимание на то, что некоторые варианты являются чисто звуковыми. Так, например, *su₁₁* и *zú*, очевидно, только пропозитивные варианты одного и того же слова (о значениях индексов и ударений мы скажем несколько ниже). Точно так же переход от *du₂* к *du₁₁* есть лишь следствие естественного процесса исчезновения конечной согласной. Объем значения слова *du₂* настолько широк, что он охватывает как понятие «говорить», так и понятие «петь».

Третья строка нашей схемы дает по порядку аккадские слова, соответствующие стоящим над ними значениям.

Разобранную до сих пор схему должно, стало быть, понимать и в том смысле, что одному клинописному знаку, история написания которого дана выше, соответствует известное число тесно связанных между собой по смыслу возможностей истолкования в шумерийском языке и что этим же понятиям соответствуют, самой собой разумеется, и определенные аккадские слова. Или, если продолжить данное нами сравнение, — определенному условному рисунку лошади будет соответствовать не только слово «лошадь», но, с одной стороны, близкие, родственные понятия, как, например, «копь», «жеребец», а с другой — понятия, вроде «ехать верхом, гарцовать» и т. п., и что эти понятия выражаются то по-английски, то по-французски.

¹⁾ Первый из этих клинописных знаков относится приблизительно к концу шумерийской эпохи (III династия на Ура), последняя форма относится к эпохе Хаммураби.

2. За этим следует дальнейший существенный шаг в развитии, основанный исключительно на том, что одни и те же знаки применяются для двух совершенно различных языков. Если, например, шумериец пишет наш клинописный знак и выговаривает его, как «ка», то с чисто внешней стороны это означает, что такому знаку соответствует вполне определенный комплекс, именно: ка. Но аккадцы выражали понятие «рот» словом, не имеющим ничего общего с шумерийским словом ка (оно звучит *rit*). Поэтому для аккадцев существуют два возможных подхода к этому знаку: либо все внимание обращается на смысл этого слова, тогда он обозначает этим знаком слова, связанные с этим смыслом (именно: *rit*, *šinni* и т. д.); либо для него важно само шумерийское слово, которое он рассматривает не как явление смыслового порядка, а как явление чисто звукового порядка, так что с этой точки зрения этот знак имеет чисто акустическое, звуковое значение. Разумеется, необходимой предпосылкой для этого является, чтобы данному шумерийскому понятию (например понятию «рот» = ка) соответствовал один определенный и неизменный звуковой комплекс, т. е. чтобы этот комплекс не зависел от того падежа или времени, в котором употреблено понятие. В ближайшем разделе мы покажем (см. ниже, стр. 77 и сл.), что это, в самом деле, является особенностью шумерийского языкового типа. Это привело к чрезвычайно важному методу: клинописные знаки получили чисто звуковые значения, соответствующие тем звукам, которыми первоначально выражались соответственные шумерийские слова. Так, например, наш знак получил значение звука КА и стал употребляться для этой цели, например для обозначения второго слога в аккадском слове *akālu*. Таким образом шумерийские слова, соответствующие определенному знаку, стали употребляться чисто формально, как знаки для обозначения слогов, и таким образом стали служить элементами письма для построения из них аккадских слов, причем каждый знак утратил какую бы то ни было связь со своим первоначальным значением. Этому процессу содействовало и чисто графическое преобразование изображений в совершенно условные грубые клинчев. В окончательном результате получилось чисто слоговое письмо, пользующееся определенными условными символами, причем история возникновения и первоначальный смысл этих символов совершенно забылись.

Внешним выражением этой истории происхождения знаков служит тот факт, что одному клинописному знаку, из которого мы исходили при нашем исследовании, был приписан целый ряд различных звуковых значений. В нашем случае, как видно из приведенной схемы, поставленный в начале ее знак можно читать самым различным образом, именно как КА, ZUG, ZU и т. д., причем надо иметь в виду, что наша таблица еще не исчерпывает всех возможностей. Итак, поскольку первоначальные шумерийские слова были односложными (а это верно для очень большого числа их), аккадцы получили материал для слогового письма.

Скажем еще несколько слов о том, как мы теперь транскрибируем эти знаки. Если в клинописном тексте встречается тот знак, который мы здесь рассматриваем, то на первых порах вопрос о том, какие из

различных звуковых значений мы должны ему приписать, остается открытым. Если у нас нет никакого основания отдать предпочтение одному из этих звуков, то берут первый попавшийся из них и пишут его прописными буквами. Такой способ написания означает следующее: в тексте стоит такой клинописный знак, который, между прочим, может быть прочтен и так, как указывают эти прописные буквы. Если речь идет о сумерийском тексте, смысл которого понятен из контекста, то, разумеется, надо делать различие между словом, означающим «лицо», и словом, означающим «кричать». В этом случае чтение знака по существу определено его смыслом, и он должен читаться в одном случае как *ka*, а в другом — как *gù*. В таких случаях применяют строчные буквы (не курсивные). Точно так же чтение вполне определено, если знак употребляется только как «слоговой знак» для написания слога в определенном аккадском слове, например *a-ka-lu*. В этом случае мы применяем строчные курсивные буквы.

3. Наконец, необходимо еще сказать и о другой возможности применения наших знаков, именно, когда они применяются как отдельные знаки в *а к к а д с к о м* тексте, но не как звуковой символ, а соответственно их первоначальному смысловому значению. Знак, примененный таким образом, носит название «идеограммы». Поэтому, если в аккадском тексте стоит знак *ka* и ему придастся идеографическое значение (т. е. он не является просто слоговым элементом), то его нужно произносить *rit*, если он употреблен в значении «рот», или *sâsu*, если ему должно быть придано значение «кричать» (само собой разумеется, что при таких идеографических написаниях надо всегда читать слово в том падеже или в той глагольной форме, которой требует положение этого слова в общей связи предложения). Аккадские тексты широко пользуются этой возможностью, произвольно чередуя слоговые написания с идеографическими.

4. Вернемся еще раз к различным звуковым значениям какого-либо знака. В окончательном результате только что описанного процесса прежде всего получается, что одному и тому же клинописному знаку в общем соответствует очень большое число звуковых значений. Разумеется, с точки зрения принципа слогового написания такое письмо должно быть рассматриваемо как чересчур сложное и многозначное. Это привело к тому, что постепенно отказались от целого ряда звуковых значений отдельного знака¹⁾, применяя его только для одного, двух или трех особенно важных звуковых значений; так, например, рассмотренный нами знак применялся главным образом для слога *ka*. В некоторых случаях (в том числе и в разбираемом нами) имеет место новое усложнение вследствие того, что в аккадском языке существовали звуки, отсутствовавшие в сумерийском, и наоборот. Это приводило к тому, что некоторые знаки, применявшиеся для написания аккадских слов, получали и такие звуковые значения, которых не могло существовать в сумерийском, но которые имели известное родство с теми или иными сумерийскими звуками. В интересующем

¹⁾ Эти орфографические правила не носили очень длительного и постоянного характера: некоторые написания имели в различные периоды различное употребление.

нас случае знак КА получает не только свое основное значение *ka*, но часто также и значение *qa*, несмотря на то, что *q*, звук *k* с придыханием, совершенно отсутствовал в сумерийском языке.

Окончательным результатом этого процесса было то, что аккадские тексты можно было писать при помощи знаков, которые были связаны хотя и многозначным, но строго определенным условным образом с определенными звуковыми и слоговыми значениями. Это имело результатом и обратное явление: аккадцы получили возможность запечатлеть произношение сумерийских слов путем разбиения их на слоги. Дело в том, что сумерийский язык во все времена вавилонской культуры играл важную роль как язык религиозного культа, юридической, медицинской и математической терминологии (эту роль остроумно сравнивали с ролью латинского языка в средние века); поэтому и в то время, когда сумерийский язык давно уже перестал быть живым языком, все еще не переставала ощущаться необходимость учиться и обучать языку и письму сумерийцев. Для этой цели были составлены большие собрания вокабул, в которых было дано, с одной стороны, произношение, с другой—смысловое значение отдельных клинописных знаков. Само собой разумеется, что и эти тексты написаны клинописью, так что для использования их необходимо знать аккадский язык. В этих текстах материал расположен так (беру для примера наш знак КА): в одном столбце дан клинописный знак КА, в другом—транскрипция сумерийского произношения; например в нем может быть написано E-NIM при помощи клинописных знаков для E и для NIM. То же относится и к другим произносительным значениям этого знака, так что такой текст имеет тот же характер, как первая и последняя строки в нашей схеме. Но, с другой стороны, существуют и словари, дающие идеографическое значение отдельных знаков в аккадских словах, например подле знака КА пишут, применяя слоговые знаки A, MA и TUM, *a-ma-a-tum*; это означает, что знак КА как идеограмма может быть применен для обозначения понятия *amatum* («приказание»). Таким образом эти тексты соответствуют предпоследней строке в первой верхней части нашей схемы¹⁾.

5. Уже разбор приведенной выше схемы дает возможность без труда понять, что для выражения одного какого-нибудь понятия, т. е. для одного сумерийского слова, часто существует целый ряд различных изобразительных возможностей: не только одному и тому же изображению могут соответствовать различные произносительные зна-

¹⁾ Эти собрания вокабул, известные под названием силлабариев, не только сыграли важную роль в деле восстановления сумерийского языка, но и вообще принесли большую пользу в деле дешифровки клинописи, так как тому, кто знаком уже с некоторым числом слоговых знаков, они помогают восстановить большое число других произносительных возможностей. Для того же, чтобы расшифровать надписи впервые, понадобились, разумеется, другие вспомогательные средства. Это было: с одной стороны, некоторое знакомство с общим строением семитических языков на основе изучения древнееврейского и арабского языков и, с другой стороны, двувывчные надписи, где были даны параллельно вавилонские и древнеперсидские тексты (персидский язык был известным уже и н д о - е в р о п е й с к и м языком). Для дешифровки же подобных текстов важную роль сыграли встречающиеся в них имена известных уже царей.

чения, но и, наоборот, одно и то же произносительное значение может соответствовать нескольким изображениям. К этому присоединяется еще и то, что здесь, как и в других языках, совершенно различные понятия могут выражаться одинаковым или очень сходным комплексом звуков, особенно если принять во внимание всевозможные процессы ассимиляции и исчезновения звуков. Этим можно объяснить то, что часто определенному слоговому значению соответствует большое число знаков, причем все они (наряду с другими слоговыми знаками) означают и данный слоговой знак, например DU. Чтобы отметить разницу между этими различными возможностями в нынешних транскрипциях текстов, условились отдельные способы написания одного и того же звукового комплекса отмечать при помощи ударений и индексов. Знак, употребляемый наиболее часто, пишется без индекса и ударения, более редкий случай обозначается острым ударением, еще более редкий — тяжелым, а дальнейшие возможности обозначаются последовательными индексами, начиная от четырех. Так, если в транскрипции встречается знак DU₁₁, то это означает, что употреблен знак KA, если же стоит просто DU (без индекса), то этим отмечается тот факт, что в тексте стоит тот знак, который дан в нашей схеме внизу (слева). При каждом из этих написаний, начиная от DU и кончая DU₂₂, повторяется то, о чем мы подробно говорили в применении к знаку KA = DU₁₁.

Так, например, и для знака DU можно реконструировать следующий процесс: знак, изображающий ногу, преобразуется в написанный над ним кликописный знак. Одно из смысловых значений этого знака — «итти», что по-сумерийски звучит как du или как ga. Поэтому данному клинописному знаку можно отнести в качестве слогового знака как DU, так и RA. Если трактовать знак DU как идеограмму, то его можно прочесть как *aláku* (по-аккадски: «итти»). Но, с другой стороны, DU не есть одна единственная идеограмма, с помощью которой может быть записано понятие *aláku*: есть целый ряд других клинописных знаков, как, например, DIR, GA и т. д., которые в процессе развития письма также стали применяться для обозначения понятия *aláku*. Отсюда видно, что существует сложная ткань взаимоотношений, связывающая между собой клинописные знаки, звуковые значения и идеографические смысловые значения.

Разумеется, в процессе развития из этой массы различных возможностей многие слова упрощаются, причем некоторые написания и комбинации получают большее применение, чем другие.

6. Продолжим теперь изучение нашей схемы (стр. 71), перейдя к левому верхнему углу. Здесь дана старинная форма числового знака 4, о которой мы говорили уже выше (стр. 66 и сл.). Ее кликописный эквивалент состоит из двух поперечных друг над другом пар клиньев, то из знака, составленного 3 + 1 клиньями. Оба эти знака применяются также и для обозначения определенного чисто звукового комплекса, хотя бы обозначаемые ими понятия не имели ничего общего с числом 4.

Рассмотрим, например, знак, изображающий миску с содержимым¹⁾, находящийся на нашей схеме в левом верхнем углу. Путем поворота изображения и линеаризации получается знак, состоящий из двух параллельных штрихов и двух примыкающих к ним справа сходящихся между собой черточек. Изменение направления клиньев при начертании двух последних черточек неудобно для письма, поэтому три клина помещаются параллельно друг другу, а четвертый пишется под ними, причем он получается при помощи косого нажима палочки. Затем этой группе придается вертикальное положение, так что в конце концов получается знак, состоящий из четырех клиньев, $3 + 1$, ничем не отличающийся от числительного 4²⁾; с другой стороны, этот знак в силу процессов, протекающих вполне аналогично процессам, описанным выше для КА, получил целый ряд звуковых значений, самым употребительным из которых является GAR³⁾. Одним из естественных значений по смысловой связи является «пища», по-сумерийски *ninda*, по-аккадски *akûlum*.

Отсюда мы видим, что к чисто графической основе многозначности знаков присоединяется еще и то обстоятельство, что некоторые первоначально различные знаки в процессе развития письма получают одни и те же окончательные формы. Дальнейшие возможности видоизменения знаков состоят, наконец, в возможности их комбинаций. Так, в нашем обзоре дана комбинация обоих знаков КА и GAR. Соответствующее изображение представляет собою комбинацию «голова + пища», что обозначает не более и не менее, как «есть, питаться» (по-сумерийски *kû*, по-аккадски *akûlu*). Этот клинописный знак составлен из знака КА с маленьким вписанным в него GAR. Как слоговой знак этот комбинированный знак имеет прежде всего звуковое значение KÛ.

в) Языки клинописных текстов.

Мы переходим теперь к вопросу о структурном различии между сумерийским и аккадским языком, различии, на котором основаны описанные выше процессы преобразования при заимствовании аккадскими сумерийской клинописи.

1) Это толкование изображения кажется мне безусловно правильным, в противоположность мнению тех, которые толкуют черточку как украшение на сосуде. Толкование этой черточки как содержимого вполне соответствует тому, что открыл Шефер (Schäfer) в своем исследовании о способе изображения в примитивном искусстве (см. список литературы II, 15).

2) Аналогичное произошло и с другим знаком (2+2; ср. рис. 1 на стр. 20) для 4. Он тождественен со слоговым знаком ZA.

3) С этим знаком GAR мы встретились уже выше, на стр. 50, как с обозначением для меры длины. Его формальная тождественность с числовым знаком 4 часто затрудняет обработку математических текстов, так как нетрудно смешать чтение 20 GAR и 20,4 (24 маловероятно, ввиду сказанного в сноске 1) к стр. 21—22). Но, кроме того, GAR может быть прочтено и как ŠA, и поэтому оно часто употребляется для обозначения аккадского относительного местоимения ša («которые»). При обработке текстов с широким применением идеографических обозначений эта новая возможность служит часто серьезным затруднением.

Как известно, различные языки соединяют в большие группы. Так, например, аккадский язык относится к числу семитических, к которым принадлежат также древнееврейский, арамейский и арабский, не говоря о менее значительных представителях этой семьи. Для семитических языков характерно, что каждый корень состоит из трех согласных, с которыми тесно связано значение слова¹⁾. Гласные же играют совсем иную роль; они служат для образования грамматических форм; поэтому они и з м е н ч и в ы (но, разумеется, эти изменения происходят по определенным законам). Чтобы лучше разъяснить это, возьмем для примера аккадское слово, обозначающее «резать». Три согласные, составляющие твердый скелет этого слова, суть *p*, *r*, *s*. Перед первой и между первой и второй или между второй и третьей вставляются гласные, указывающие на время, залог и т. п., так что схема аккадского глагола может быть выражена как функция трех параметров, корневых согласных c_1, c_2, c_3 , от которых зависит смысл глагола, и трех переменных x_1, x_2 и x_3 — гласных, служащих для выражения определенной глагольной формы²⁾. Так, например, «я режу» будет *araras*, «он режет» — уже *iraras*. Итак, первое лицо настоящего времени всегда выражается последовательностью гласных $x_1 = a, x_2 = a, x_3 = a$. Третье лицо: $x_1 = i, x_2 = a, x_3 = a$. Третье лицо прошедшего времени имеет последовательность гласных: $x_1 = i, x_2 = o, x_3 = u$, причем записью $x_2 = o$ мы выражаем тот факт, что между согласными c_1 и c_2 не вставляется н и к а к о й гласной: «он резал» будет поэтому *iprus*.

Эти приведенные мною формы относятся к так называемой «главной основе» аккадского глагола (она называется также основой «I» или, применяя соответствующий термин из еврейской филологии, — основой «Qal»). Но наряду с этой главной основой существует еще так называемая усилительная основа (основа «II» или «Paal»), которая отличается от главной основы тем, что средняя согласная c_2 удваивается, но между этими двумя одинаковыми согласными не вставляется уже гласная. Поэтому, если мы главную основу охарактеризовали схемой

$$f(c_1, c_2, c_3; x_1, x_2, x_3),$$

то схемой усилительной основы будет

$$f(c_1, c_2c_2, c_3; x_1, x_2, x_3).$$

Гласные для третьего лица настоящего времени будут здесь

$$x_1 = u, x_2' = a, x_3 = a,$$

¹⁾ Этот «триконсонантизм» (называемый также «трилиттерализмом») в наиболее чистом виде сохранился у глагола, тогда как в именах имеется ряд исключений (корни с двумя согласными).

²⁾ Steintal-Mistelli, Sprachwissenschaft, II, стр. 427, цитирует греческое сравнение: «τὰ φωνήεντα τῇ ψυχῇ ὁμοίαι τε δὲ σὺμφωνὰ τῷ σώματι» (гласные сходны с душой, а согласные — с телом).

а для третьего лица прошедшего времени

$$x_1 = u, x_2 = a, x_3 = i,$$

следовательно, *uparras* и *uparris* (см. нижеследующую схему).

О с н о в а			Наст. вр.	Прот. вр.
I	Главная основа (Qal)	$c_1 c_2 c_3$	iaa (<i>iparras</i>)	iou (<i>iprus</i>)
II	Усилительная основа (Paal)	$c_1(c_2 c_2)c_3$	uaa (<i>uparras</i>)	uai (<i>uparris</i>)
III	Каузативная основа (Šafel)	$\check{s}(c_1 c_2)c_3$	uaa (<i>ušapras</i>)	uai (<i>ušapris</i>)
IV	Страдательная основа (Nifal)	(nc_1) $(c_1 c_1) c_2 c_3$	iaa (<i>ipparas</i>)	iai (<i>ipparis</i>)

В этой схеме даны еще две основы, именно каузативная основа (корень «III» или «šafel»), при которой из первоначального понятия создается новое понятие, равносильное выражению «заставить что-либо делать» (в данном случае: «заставить резать») ¹⁾, и страдательная («IV» или «Nifal»), соответствующая приблизительно нашему страдательному залогу. Характерной особенностью каузатива является прибавление вначале неизменяющегося согласного š. При этом, чтобы спасти схему триконсонантизма, согласные c_1 и c_2 следуют непосредственно одна за другой, так что снова оказывается возможным вставить только три гласные. Такими гласными служат для третьего лица настоящего времени **u, a, a**, для прошедшего **u, a, i**, так что получаются формы, данные в нашей схеме. Соответственным образом в страдательной основе на первое место ставится согласная **n**, и триконсонантизм спасается тем путем, что это **n** ставится непосредственно перед первым согласным (при этом часто имеет место чисто фонетическое преобразование — ассимиляция этого **n** с первой согласной, так что из nc_1 получается $c_1 c_1$; такое именно преобразование наблюдается и во взятом нами примере *prs*). Наша схема показывает также, какие при этом применяются гласные и где они ставятся.

Данное здесь описание аккадских глагольных форм имеет в виду, само собой разумеется, типичный и совершенно правильный случай. Действительное положение вещей, конечно, много сложнее, так как, с одной стороны, существуют не только эти четыре основы, но еще большое число основ аккадского глагола ²⁾; далее, с одной стороны, корни из трех согласных расширяются в корни из четырех согласных; с дру-

¹⁾ Эта форма имеется в русском языке: «пить» — каузатив: «поить»; «расти» — каузатив: «растить». *Переводчик.*

²⁾ Точно так же времена и формы не соответствуют так точно нашим категориям, как мы это изобразили ради простоты.

гой—благодаря отпадению и ассимиляции (и вначале и другие так называемые «слабые корни») имеют место дополнительные процессы, которые, разумеется, выходят за рамки нашего изложения.

Абсолютную противоположность этим изменениям, обусловленным взаимоотношениями между неизменными согласными и переменными гласными в аккадском языке, представляет шумерийский языковый тип. Здесь смысловой единицей является не твердый скелет согласных, а целый слог с учетом как согласных, так и гласной букв. Так, слово *gar* означает «класть», и при всех грамматических видоизменениях, которым подвергается этот глагол, общее им всем слово *gar* остается неизменным. Из этого постоянства гласной сл е д у е т, что все грамматические процессы происходят за пределами собственного корня слова, т. е., следовательно, вся грамматика шумерийского языка необходимо должна быть построена на присоединении приставок и суффиксов и на относительном взаимном положении этих словообразующих элементов по отношению друг к другу и к корню слова. Каким способом образуются здесь различные глагольные формы, покажет хотя бы несколько примеров на формы глагола *gar*. Так, желательная и повелительная формы—*gagar*, *hegar*, *garra*, утвердительная форма—*igaren*, каузативная—*abgar*, усилительная—*gargar* и т. д. Уже этих примеров достаточно для того, чтобы с полной отчетливостью выявить контраст с построением форм в аккадском глаголе (ср., например, таблицу на предыдущей странице); к неизменяемому корню слова присоединяются такие же неизменяемые словообразующие элементы, не сливаясь с корнем слова в речевую единицу высшего разряда. Выражая этот факт в нашей математической символике, можно было бы сказать, что шумерийский глагол может быть символически выражен не при помощи того математического образа, который мы выше применяли для аккадского глагола, т. е. не в виде функции трех аргументов, зависящей от трех параметров, а тем путем, что самое понятие представляют в виде одного только параметра C , а грамматические функции представляют в виде наложенных друг на друга операций $\varphi_1 (\varphi_2 (\dots (C)))$. То, что мы здесь несколько подробнее поместили для глаголов, верно *mutatis mutandis* и для всех других элементов обоих языков.

Намеченная здесь противоположность структуры аккадского и шумерийского языков идет еще значительно глубже. А к к а д с к и й язык принадлежит, как уже было сказано, к группе семитических языков, близко родственных между собой, — это родство значительно ближе, чем родство между различными языками индо-европейской семьи. Однако семитические и индо-европейские языки, взятые вместе, образуют одну группу, стоящую на сравнительно более высоком уровне по их грамматической структуре: оба они являются «*флектирующими*» языками. Обрисованный здесь способ образования форм аккадского глагола есть наиболее резкий процесс «флектирующего» процесса изменения: формы образуются путем максимально резкой перемены состава гласных внутри слова и при помощи дополнительных элементов (префиксов, инфиксов, суффиксов), образующих неразрывное целое с корнем слова.

Наиболее резкую противоположность такой процедуре образуют «изолирующие» языки (к которым принадлежит, например, китайский язык). Какое бы то ни было различие между «глаголом», «именем», «предлогом» и т. д. теряет здесь совершенно смысл. Слова являются здесь односторонними, совершенно неизменяемыми объектами, грамматическая связь их устанавливается только их расположением внутри предложения. Применяя опять наш математический образ, мы изобразим тип изолирующего языка закономерным расположением совершенно независимых друг от друга постоянных $C_1 C_2 \dots C_k$.

Сумерийский язык принадлежит к языковому типу, который хотя и не является «изолирующим» в строгом смысле слова, по логическому отношению стоит гораздо ближе к изолирующим языкам, чем к какому-либо из флектирующих; его называют «агглютинирующим» («сцепливающим»). Как уже было подчеркнуто, сумерийские корни совершенно неизменны. Грамматические функции получаются при помощи элементов, прибавляемых (спереди или сзади) к корню слова, являющемуся носителем значения слова. Эти словообразующие элементы, однако, отнюдь не связаны органически с самим словом, но присоединены к нему непечно, совершенно так же, как оперативный символ знака функции по известным условным правилам присоединяется к величинам, под которыми должно производиться действие. Так, например, целое предложение, сохраняющее полный порядок в расположении своих членов (существительное — прилагательное — ... — глагол) может при таком построении занять место подлежащего. Если бы, сверх того, еще отдельные знаки этих функций были словами с самостоятельным значением (иногда это действительно так, как, например, в словообразующих элементах множественного числа и направления), то сумерийский язык получил бы непосредственно изолирующий характер. Является ли агглютинирующий тип более поздней формой первоначально изолирующего языка (или же, как предполагали некоторые, наоборот), в настоящее время уже невозможно сказать, так как писаная традиция сумерийского языка начинается только на последней стадии его существования.

Эта глубокая противоположность между сумерийским и аккадским языками, выражающаяся как в построении отдельных слов, так и во всем синтаксисе, является главной основой всей системы клинописи. Факт постепенной смены господствующих элементов населения сам по себе был бы недостаточен, чтобы объяснить именно наиболее характерные черты: лишь абсолютная противоположность обеих групп языков во всех их чертах могла привести к двойному способу написания в аккадском языке: с одной стороны, к идеографическому, с другой — к алфавитическому. В основе нашего описания развития звукового значения клинописных знаков лежит, как существенная часть нашего рассуждения, предпосылка, что звуковые образы и прочно связаны с изображениями предметов, что, например, с изображением понятия «есть, питаться» всегда связан звуковой образ «ки». Из языка типа аккадского никогда не могла бы развиться такая корреляция, ибо здесь одному лишь изображению, скажем, какой-либо деятельности, без каких-либо пояснений, соответствует не какое-либо отдельное неиз-

менное слово, а лишь глагол, звуковой образ которого в большой степени зависит от его грамматической формы, связанной со структурой предложения. Таким образом постоянство гласной в сумерийском языке является важной предпосылкой для способа обозначения в слоговом письме, когда старинные изображения становятся чисто звуковыми символами. С другой стороны, это имело следствием то, что аккадцы приняли для своего языка «вокализованный» (включающий гласные) способ написания, т. е. они писали совершенно иначе, чем, например, евреи или арабы, обозначавшие только согласные (более поздние, вторичные обозначения для гласных в этих системах письма мы оставляем здесь в стороне)¹⁾.

Другой предпосылкой слогового письма является, само собой разумеется, требование, чтобы первоначальные слова были, как правило, односложными. Это требование было осуществлено в сумерийском языке, что и явилось чрезвычайно счастливым стечением обстоятельств, предопределившим возможность всего дальнейшего развития. Если бы первоначальные сумерийские изображения были знаками какого-либо языка, в котором слова, как правило, многосложны, то эти изображения были бы совершенно негодны для развития слогового письма. Итак, и здесь решающую роль играла специфическая структура сумерийского языка. Язык, в котором грамматические процессы происходят внутри корней слов, естественно нуждается в многосложных языковых элементах для того, чтобы получить достаточную возможность проявить разнообразие форм при помощи перемены гласных. Правда, и в сумерийском языке немало многосложных слов. Но подавляющее большинство сумерийских слов односложно, и именно на этих словах была, конечно, построена система аккадских слоговых знаков. Если целый ряд признаков, показывающих, что это состояние сумерийского языка не было первоначальным, но что в тот период своей истории, от которого до нас дошли сумерийские письмена и в которой сумерийцы встретились с семитами, этот язык претерпел уже целый ряд упро-

¹⁾ Это имело то интересное для нас последствие, что до нас таким образом дошла вся система гласных в одном из древнесемитских языков и, кроме того, еще система гласных в сумерийском языке (разумеется, исключая такого рода фонетические тонкости, которые не могут быть переданы абсолютно точно ни в одной системе письма, — стоит вспомнить только о различных оттенках звука, передаваемого одной и той же буквой *a*, в любом из живых европейских языков).

Фактическая последовательность в открытии этих явлений была, конечно, диаметрально противоположной ходу исторического процесса. На основании еврейского, арабского и других живых семитических диалектов уже давно составилось правильное представление о строении семитического языка и его гласных. Как было упомянуто уже выше, первая дешифровка ассирийских надписей из двужычных надписей и из индо-европейского древнеперсидского языка, равно как и из того, что были известны имена лиц и городов; произношение же этих имен было известно из греческого, еврейского и других языков. Если присоединить сюда знакомство с общими законами семитических языков, то открылась возможность получить полное представление о языковой структуре аккадского языка. Силлабизм перебрали, наконец, и в сумерийском языке. Ныне взаимоотношения между различными языками и языковыми группами выявлены настолько, что пробелы в значительной мере заполнены. Это позволяет уже перейти к гораздо более тонким фонетическим изысканиям, чем это было возможно в первую эпоху ориенталистики.

щепий и видоизменений. Явления этого рода мы можем наблюдать еще в дошедшем до нас материале, как, например, переход *kug* в *kū* или *ša₄* в *ša* и целый ряд подобных изменений. Итак, особый языковый тип шумерийского языка вместе с его глубокой древностью послужили предпосылкой для всего того комплекса явлений, который мы выше наметили в общих чертах.

г) Математическая терминология.

Переходя к терминологии математических клинописных текстов, мы должны резко разграничить друг от друга два принципиальных вопроса. Первый вопрос касается истории значения отдельных терминов; этот вопрос ставится для клинописной литературы, разумеется, точно так же, как и для всякого другого исторического периода. Но наряду с этим в вавилонской математике существует еще второй, гораздо более важный вопрос—именно, вопрос о происхождении ее алгебраического характера. В гл. V мы убедились, какого удивительного развития достигло овладение алгебраическими методами. Как и для развития новой алгебры, для развития вавилонской алгебраической математики решающую роль сыграло существование специально приспособленной системы обозначений. История дает нам все новые и новые подтверждения того, что мощь какой-либо символики всегда оказывается значительно большей, чем предполагалось при ее первоначальном применении. Таким образом наш второй вопрос касается самих основ всей клинописной математической литературы.

Что касается истории отдельных терминов, то, к сожалению, необходимо заметить, что в настоящее время мы еще далеко не в состоянии дать эту историю в сколько-нибудь исчерпывающем виде. Это отнюдь не удивительно, если вспомнить, насколько по самой своей сущности запутана история всякой математической терминологии. Если даже история развития многих терминов нашей теперешней математики остается до сих пор еще далеко не выясненной, то еще много запутаннее положение вопроса об античной терминологии, для восстановления которой наш материал чрезвычайно скуден. Лишь происхождение немногих математических терминов более или менее непосредственно ясно. Таково, например, характерное для таблиц умножения слово *a-gá*, которое мы для простоты контекста перевели частицей «жди» (ср. стр. 36). Историю клинописного знака *ga* мы дали уже в нашей большой схеме на стр. 71, и из нее следует с очевидностью, что значение этого слова находится в связи с понятиями «ходьба», «ходить». Этот ход мыслей может быть лучше всего передан при помощи того представления, которое лежит в датском выражении «tre gange», т. е. «три хода», в смысле три раза. Но, как сказано было выше, если мы перейдем к другим терминам, то окажется, что здесь дело далеко не так просто. О термине для образования обратных величин (*igi*, «глаз») мы говорили уже выше на стр. 24 п 32—33. Столь же неясно, например, и другое слово, связанное с умножением. Это слово восходит не к *a-gá*, а к *kū* = *akdu*, «есть, питаться» (*šuláku*— см. нашу схему на стр. 71). Более или менее сходно толкование вещей для значительного числа математических

понятий. К некоторым из них мы еще вернемся. Но действительно систематическое исследование в области терминологии — пока дело будущего и зависит главным образом от нахождения новых текстов.

Второй вопрос — о выработке алгебраической символики — приводит нас снова к тем явлениям, о которых мы так подробно говорили в предшествующих отделах. Всякая алгебраическая процедура предполагает, что существуют определенные постоянные символы как для математических действий, так и для самых величин. Тishь существование такого символического письма делает возможным то, что величины, числовое значение которых не дано, комбинируются между собой и из них создаются новые комбинации.

Но такое символическое письмо было в готовом виде при написании аккадских текстов. Как мы видели, мы имеем при этом в распоряжении два способа выражения: либо прибегают к слоговому способу письма, либо пишут при помощи идеограмм. Оба способа написания в большинстве аккадских текстов чередуются между собой непрерывно и совершенно произвольно. Этот исторически возникший способ написания оказал решающее влияние на математическую терминологию. Благодаря ему вошел в употребление очень удобный прием написания математических понятий (т. е. как действий, так и величин) идеографически. Это означает, что в тексте, написанном по-аккадски, решающие понятия всегда пишутся при помощи условных символов, состоящих каждый из одного знака. Таким образом с самого начала была создана важнейшая основа для алгебраического развития, — именно, надлежащая символика.

На первых порах это только частный случай обычного в клинописном письме произвольного выбора между идеограммами и слоговыми написаниями. Но как раз с математической точки зрения существование условных символов, состоящих из одного знака типа идеограммы, имело величайшее практическое значение для легкости и наглядности действий. Таким образом все вело к написанию, состоящему сплошь из формул; мы сейчас убедимся на примерах, что так действительно и произошло ¹⁾.

Это обстоятельство имеет большое значение для чтения клинописных математических текстов. Если нам известно некоторое число постоянно повторяющихся идеограмм для отдельных действий, для терминов «сумма», «разность» и т. д., для длины, ширины, поперечника, то мы можем прямо транскрибировать такой текст на наш язык формул без того, чтобы при этом было необходимо знать, как произносилась эта идеограмма в аккадском языке. Так, например, некоторая определяющая идеограмма RI всегда употребляется для понятия линии внутри фигуры, делящей ее площадь на две части (как, например, хорда в круге); несмотря на то, что аккадское чтение этой идеограммы не было известно, всегда удавалось правильно понять, какую математическую

¹⁾ Некоторые тексты показывают также, что и другим путем стремились вполне сознательно к таким условным упрощениям, именно путем применения действительных сокращений для аккадских слов: писал только один слог. С точки зрения истории письма здесь идеограммы, употребленные в слоговом смысле, заменили настоящие идеограммы.

роль играет эта величина в вычислениях. Лишь много позже из написанных syllabически параллельных мест узнали, что RI читалась как *pi-ir-kum*, что означает «засов» или нечто в этом роде. Это приоткрывает несколько завесу, скрывавшую историю значения этого термина, но для понимания той роли, которую он играет в математических текстах, знание того, как он произносится, имеет столь же малое значение, как, например, знание того, как произносятся математические термины в работе, написанной по-испански.

Эти явления мы иллюстрируем на двух примерах из математических текстов. Первый пример заимствован из древнего текста, написанного с сравнительно небольшим применением идеограмм. Второй текст написан чисто идеографически; из него мы убедимся, что мы уже имеем дело с чистым языком формул¹⁾. С особенно далеко идущим примером применения идеограмм как математических символов мы ознакомились уже в начале этой книги в небольшой выдержке из астрономического текста (см. стр. 34), из которого было ясно, что идеограммы *tab* и *lal*, означавшие первоначально «прибавлять» и «отнимать», играли точно такую же роль, как наши знаки $+$ и $-$.

Первое интересующее нас место читается так:

3 a-rá 2 6 igi 6 gál 10 i-na-di-kum

10 i-na 7 ki-im-ra-ti-i-ka uš à sag

a-na-sà-aḥ-ma 6,50 ša-pi-il₅-tum.

При толковании этого текста мы будем двигаться методически, точно таким же образом, как это происходит в действительности при разборе нового текста. Сперва анализируют числа. «3 a-rá 2 6» представляет собой, очевидно, умножение. Далее следует «igi 6 gál 10»; здесь образована обратная величина: $\bar{6} = 0;10$. Заключительным действием является вычитание, связывающее между собой цифры 10. 7 и 6,50 в виде $7 - 0;10 = 6;50$. Слова, набранные обыкновенным шрифтом, взяты из шумерийского языка, курсивным — из аккадского. Мы видим, что шумерийские слова применяются как термины для умножения и образования обратных величин. Далее, понятия «uš» и «sag», т. е. «длина» и «ширина» (конец второй строки), написаны с помощью идеограмм. Стоящее перед этим слово *ki-im-ra-ti-i-ka* восходит к корню *kaṭāru*, «прибавлять», и служит для объяснения смысла числа 7; таким образом вторую строку надо переводить: «10 от 7, twiceй суммы длины и ширины», и далее строка 3: «я вычитаю и 6;50 есть разность» (*a-na-sà-aḥ-ma* от *našāhu*, «вырывать, вычитать», *ša-pi-il₅-tum* от *šaplu*, «низ», «разность»). Первую строку надо переводить так: «3-жды 2 6. Обратная величина от 6, 10 дает оно тебе» (*i-na-di-kum* от *naḍānu*, «давать»). Разумеется, перевод «образовать обратную величину» с филологической стороны очень вольный.

¹⁾ Вдобавок в математических текстах шумерийские образования применяются в грамматически совершенно неправильном виде, откуда видно, что они в действительности были уже только символами для понятий, причем совершенно игнорируется тот факт, что их первоначальным источником является язык совершенно иного состава и строения.

Приведенный здесь пример текста показывает очень отчетливо чередование между идеографическими и слитабическими написаниями. Многие тексты написаны еще в гораздо большей мере идеографически. Для всех встречающихся здесь математических понятий существуют идеограммы, так что во многих других текстах подобные нашим выкладки были бы написаны чисто идеографически, при помощи лишь формулы, т. е. примерно в таком виде, как это наблюдается здесь, в существенных чертах, лишь в первой строке ¹⁾.

Второй пример имеет источником текст, на котором мы остановимся подробнее еще в гл. V (см. ниже, стр. 214). Как на образец примененной в нем терминологии укажу, например, на группу задач этого текста от № 4 до № 7. В этом месте читаем:

№ 4 uš a-rá 3 e-tab
sag a-rá 2 e-tab
gar-gar ib-si,
a-ša uš dah-ma 4,56,40

№ 5 a-ša uš a-rá 2 e-tab
dah-ma 5,11,40

№ 6 a-ša uš ba-zi 4,26,40

№ 7 a-rá 2 e-tab
ba-zi-ma 4,11,40

Трудно перевести это место дословно, так как оно, в сущности говоря, лишено какой бы то ни было грамматической структуры, но состоит почти только из идеограмм; передача такой идеограммы словом из нашего языка неправомерна потому, что мы неизбежно должны выбрать определенную грамматическую форму, тогда как в действительности всякие грамматические формы уже совершенно отсутствуют в таком тексте. Наш текст может быть передан приблизительно так:

№ 4 Длина на 3 помножено
ширина на 2 помножено
сложено квадратно
площадь длин(ы) сложено и так 4,56,40

№ 5 Площадь длин(ы) на 2 помножено
сложено и так 5,11,40

¹⁾ К тому же интересно отметить, что, поскольку мы в настоящее время в состоянии судить о древности текстов, более поздние тексты написаны в большей мере идеографически, чем более древние, например тексты времени Хаммураби. Это постепенное усиление идеографического элемента в тексте характерно не только для математических текстов, но и для других видов текстов. В применении к математическим текстам это означает, что переходят все в большей и большей степени к условному написанию на языке формул. Таким образом математические тексты получают постепенно вид написанных на особом техническом языке, причем не обращается никакого внимания на первоначальный грамматический характер примененной сумерийской формы. Мы имеем здесь дело с явлением, наблюдающимся нередко и в нашей нынешней терминологии.

№ 6 Площадь длин(ы) отнято 4,26,40

№ 7 На 2 помножено

отнято и так 4,11,40

Гораздо рациональнее будет перевести эти задачи прямо на язык формул. Стоит только вместо идеограммы для неизвестных и^ж, «длина», и sa^ж, «ширина», подставить наши обозначения x и y и соответственным образом преобразовать и действия. Тогда мы получим, соблюдая порядок слов в подлиннике, следующий «перевод», наиболее близкий к настоящему тексту:

№ 4 $x \cdot 3$

$y \cdot 2$

$+^2$

$x^2 + = 4,56,40$

№ 5 $x^2 \cdot 2$

$+ = 5,11,40$

№ 6 $x^2 - 4,26,40$

№ 7 $\cdot 2$

$- = 4,11,40$

В этих формулах всегда сначала называются величины, над которыми производятся действия, а затем уже эти действия, в полном соответствии с тем, что мы видели в примере на стр. 33, где знаки плюс, минус и т. д. поставлены не перед числами, к которым они относятся, а **п о з а д и** них. Если пренебречь этой внешней особенностью, то наши примеры точно соответствуют следующим формулам:

№ 4 $(3x + 2y)^2 + x^2 = 4,56,40$

№ 5 $+ 2x^2 = 5,11,40$

№ 6 $- x^2 = 4,26,40$

№ 7 $- 2x^2 = 4,11,40$

Мы видим, таким образом, что здесь применен способ выражения, являющийся в своей основе совершенно алгебраическим и состоящий прежде всего в действиях над неизвестными величинами. Об этих задачах по существу и их месте в системе вавилонской математики мы скажем ниже (ср. гл. V, стр. 214).

§ 3. ЕГИПЕТСКОЕ ПИСЬМО.

Египетское письмо считалось всегда образом пиктографического письма, т. е. письма, составленного из изображений. И в самом деле, те графические элементы, из которых состоит египетское письмо и которые мы во все время египетской культуры находим на бесчисленных памятниках всякого рода, представляют собой изображения людей, зверей и неодушевленных предметов. Однако эти «пиктографические» надписи не могут быть поняты как прямое изображение содержания

без знания языка. Как раз наоборот, перед нами настоящая система письма, только отдельные знаки здесь не являются группами черточек, которые сами по себе не имеют смысла, а отдельными фигурами, но так, что значение этих фигур не имеет ничего общего с содержанием текста, написанного с их помощью. Прежде чем остановиться подробнее на этом типе письма, мы в кратких словах набросаем его внешнюю историю.

Говоря о вавилонском письме, мы показали, как путем постепенного преобразования под влиянием скорописи изображения, вполне аналогичные египетским иероглифам, превратились в условные знаки письма. Но так как эти вавилонские знаки каждый в отдельности о т т и с к и в а л и с ь на глиняных табличках, то система письма на памятниках никогда не расходилась сколько-нибудь значительно с письмом в обыкновенных текстах, ибо техника отщипывания или выдавливания знаков письма не могла служить исходным пунктом для появления принципиально различных форм этих знаков. Совершенно иное положение дел в египетском языке, где уже со времени Древнего царства для повседневных нужд выработался тип письма, существенно отличающийся от того, который применялся для больших памятников, именно письмо (черной и красной тушью) на папирусе. Это курсивное письмо называют «иератическим письмом». Древнейшие иератические тексты, так же как и древнейшие сумерийские надписи, начертаны вертикальными столбцами, следующими друг за другом справа налево. Совершенно так же, как и в клинописи, этот способ письма оказался слишком неудобным для писца. Поэтому здесь, как и там, перешли к письму горизонтальными строками. В клинописи это привело, как мы видели выше (стр. 68), к повороту отдельных знаков на 90°, благодаря чему и получились горизонтальные строки, идущие слева направо. Египтяне же, применяя иератическое письмо, никогда не забывали, что их знаки имели характер изображений, тем более, что египетское письмо с изображениями продолжало существовать на памятниках. Отход от вертикального способа писания не мог здесь поэтому осуществляться просто путем поворота направления письма, так как в этом случае все фигурки лежали бы, вместо того чтобы находиться в вертикальном положении. Поэтому отдельные знаки здесь сохранили свое настоящее положение, но их писали не друг под другом, а рядом друг с другом, справа налево.

Иероглифические памятники расположены большей частью вертикальными колоннами, идущими справа налево. Однако из декоративных соображений и ради экономии места очень часто применяются и горизонтальные строки. На надписях очень часто из соображения экономии меняется и направление письма, т. е. изображения, без ущерба для их ясности, могут иметь вид зеркального отражения обычных изображений. Знаки всегда поставлены так, что фигуры людей и зверей обращены лицом к читающему¹⁾; поэтому никогда не может возникнуть сомнения, следует ли данную иероглифическую надпись

¹⁾ То-есть лица обращены в сторону, обратную направлению письма
Периодик.

читать справа налево или слева направо. Из чисто практических соображений в наше время при наборе иероглифических текстов знаки печатаются слева направо. При сравнении такой иероглифической транскрипции с иератическим текстом необходимо иметь в виду, что иератические тексты писались справа налево, тогда как наша транскрипция имеет обратное направление.

Древнейшие иератические надписи еще рабски следуют своим иероглифическим прототипам. Но постепенно появляется большое число условных сокращений и слияний, так что иератический шрифт получает характер самостоятельного письма (рис. 24 на этой странице, а также рис. 42 на стр. 148). В дальнейшем ходе этого процесса образовался так называемый «демотический» шрифт, который почти потерял какое бы то ни было сходство с иероглифами. Само собой разумеется, параллельно идет изменение самого языка от «древнеегипетского» через «среднеегипетский» и «позднеегипетский» к «демотическому».

Последнюю фазу египетского языка называют, как известно, «коптским» языком. Это — язык обращенных в христианство египтян начала средневековья (приблизительно 300 г. н. э.).

Шрифт, которым пишутся коптские тексты, уже не представляет собой какого-либо видоизменения иероглифов: это — греческие буквы или, вернее, столь же позначительное изменение греческого алфавита, как нынешние русские буквы. Это сохранение самого позднего египетского языка, благодаря шрифту, читающемуся без всяких затрудне-

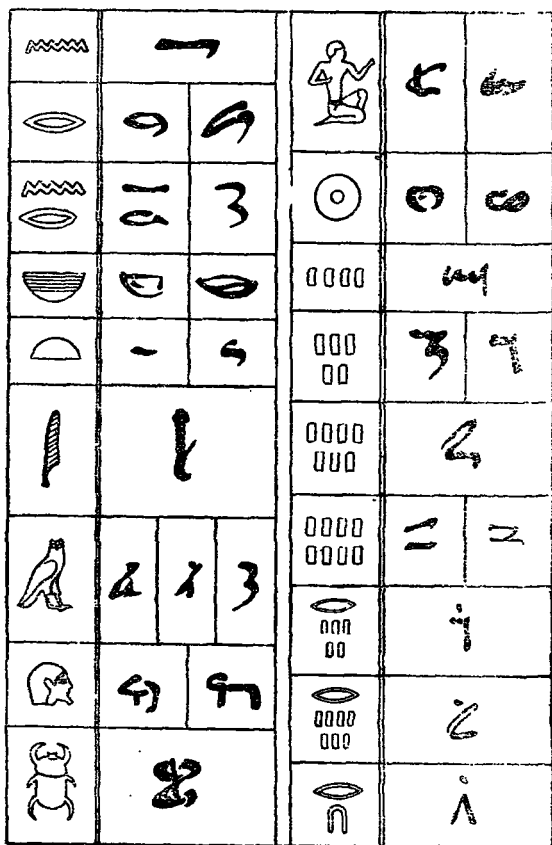
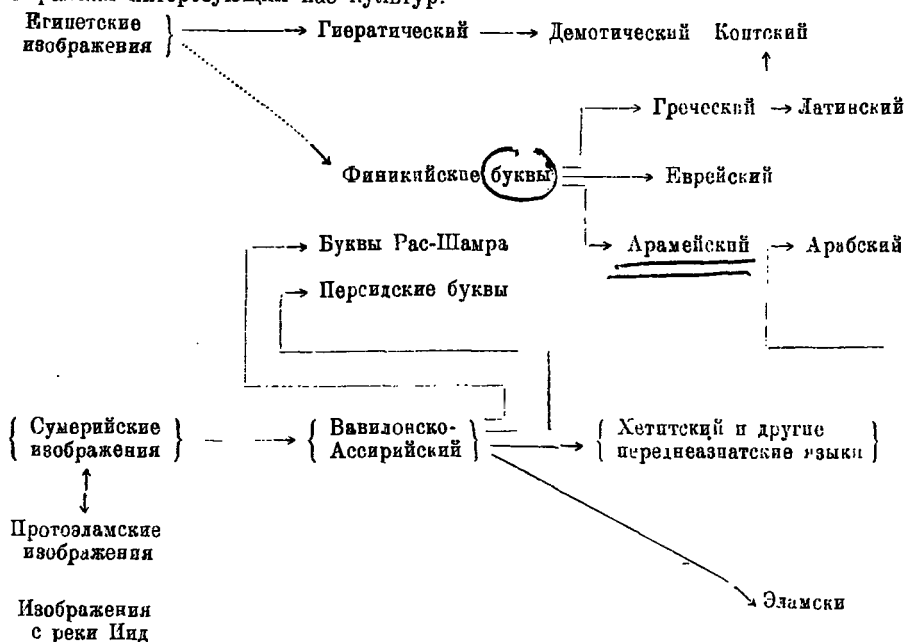


Рис. 24. Левый столбец содержит иероглифические формы, правый — иератические. При этом данная в левом столбце иератическая форма по большей части соответствует характеру письма при V и VI династиях (конец Древнего царства). Правый столбец содержит письмена Среднего царства и, значит, в основных чертах совпадает с письмом математических текстов.

ний, явилось самым важным вспомогательным средством для дешифровки древнеегипетского языка ¹⁾.

Мы переходим теперь к выяснению, в кратком обзоре, принципа египетского письма, конечно, лишь в объеме, необходимом для понимания определенного круга вопросов, относящихся к математическим текстам. Точно так же мы можем, очевидно, ограничиться пиктографической формой знаков, ибо преобразование их в гнечатические и демотические представляет интерес лишь с точки зрения истории письма, причем, в противоположность клинописи, во всем процессе этого пре-

¹⁾ В качестве добавления мы даем схематический обзор развития письма в рамках интересующих нас культур.



Этот обзор показывает, как из сходных начал возникают совершенно различные системы письма. Развитие египетского языка и письма было совершенно непрерывным и имело своим результатом то, что без всяких сколько-нибудь существенных разрывов перешли во вполне совершенно самостоятельную систему письма, именно демотическую. В вавилонском письме мы также на первых порах наблюдаем непрерывное изменение первоначального пиктографического письма. Но затем имеет место переход от сумаерийского языка к семитическому, причем письмо остается в основе своей неизменным, а язык меняется коренным образом, так что между языком и письмом нет уже никакой прямой связи. На последней фазе развивается буквенное письмо, по видимому, как из египетского, так и из клинописи (из клинописи возникло персидское буквенное письмо и недавно открытое буквенное письмо Рас-Шамра, местности на сирийском побережье к востоку от Кира, относящиеся к XIV в.; вероятно, под влиянием египетских протописей возникло в это же время или несколько позже финикийское буквенное письмо, продолжением которого является греческое, а затем и латинское письмо). Все эти виды буквенного письма были изобретением национальных групп, для которых как египетское письмо, так и клинопись были чуждыми и искусственными системами.

образования полностью сохраняется принцип, лежащий в основе иероглифического способа записи.

В дальнейшем мы приведем некоторые иероглифические знаки (рис. 25), показывающие, как некоторые предметы изображаются в виде иероглифов, причем указано, как называются эти знаки по-египетски. При этом необходимо обратить внимание на то, что гласные египетского языка нам совершенно неизвестны;

как мы уже говорили, для облегчения чтения вставляются произвольные гласные, но большей части «е». Кроме того, и «полугласные» ʔ (алеф), ʾ (апп), $i = j$ (йод), w (вав) ради простоты читаются соответственно как *a*, *a*, *i* и *u*. В действительности это — своеобразные звуки, встречающиеся и в других семитических языках и в схеме построения слов играющие роль согласных. Но то, что они (со следующими за ними гласными) звучали как гласные, показывают, например, греческие транскрипции.

Египетский язык по меньшей мере очень близок к семитическим языкам, что видно, например, из часто встречающегося здесь триконсонантизма ¹⁾. Но наряду с трехбуквенными корнями в египетском языке есть большее число корней, состоящих из двух или одной согласной (часто это отступление от триконсонантизма имеет причиной лишь процесс сглаживания первоначальных форм). Это имело то важное последствие для письма, что целый ряд знаков служил знаками для двух или для одной согласной, вследствие чего большое число знаков получило роль букв. Эти знаки стали теперь употребляться для того, чтобы служить «фонетическим дополнением» для знаков, обозначающих сразу несколько согласных. Знак  уже сам по себе означает *hpr*, но очень

часто он пишется в виде , т. е. еще специально прибавляется послед-

нее *r* . Точно так же  означает *'nh*, но пишется и в виде ,

где дополняется еще *n* и *h*. Дальнейшим важным вспомогательным средством для чтения иероглифических текстов являются так называемые «детерминативы», которые ставятся в конце слов. Это — знаки, которые самым смыслом заключенных в них изображений указывают, к какому классу предметов принадлежит соответствующее слово. Такими классами являются, например, мужчины (и, следовательно, собственные имена, обозначение профессий), женщины, животные, боги, действия рукой (бить, нести), понятия вроде малый, дурной, затем страхи, города, небесные явления или предметы из дерева, камня и т. д. Несколько примеров мы приводим (рис. 26). Фонетические

	<i>n</i>	вода
	<i>r</i>	рост
	<i>r'</i>	солнце
	<i>pr</i>	плац дома
	<i>'nh</i>	ремень от сандалии
	<i>hpr</i>	жук

Рис. 25.

¹⁾ Истолковывая подробнее с этим вопросом отсылаю к сообщению Fr. Callie, Über semitische ägyptische Sprachvergleihung, Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, N. F., 10, стр. 25 и сл., 1931.

дополнения даны при этом всюду в круглых скобках. Последний знак — всегда детерминатив. Сидящий человек с вытянутой рукой означает человека вообще; диск солнца характеризует астрономические понятия; шагающие поги — понятие ходьбы; книжный свиток (папирусный свиток с печатью и концами завязок) — знак для общих отвлеченных понятий; человек с рукой у

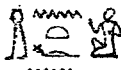
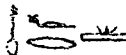
	<i>m(n)tf</i>	собственное имя
	<i>nhh</i>	вечность
	<i>pr(r)</i>	ити
	<i>nfr(fr)</i>	хорошо
	<i>(hr)hrrw(w)</i>	голос

Рис. 26.

рта — знак, стоящий при словах, обозначающих деятельность рта, как-то: говорить, есть и т. д. Важным дополнительным детерминативом является детерминатив множественного числа III, который ставится и при вещественных понятиях, как, например, *hkt*, «пиво». Хотя не все слова характеризуются такими детерминативами, но во

всяком случае такие детерминативы весьма обычны и, благодаря тому, что стоят всегда в конце слова, весьма облегчают чтение.

Как можно видеть уже из этих немногих примеров, все знаки представляют собой изображения, но смысловое значение этих изображений играет роль только в том случае, когда они — детерминативы. Так, например, знак лапы дома *pr* встречается в слове *prj*. «пти», как его первый знак. Но может случиться и так, что потребуются написать слово «дом» (*pr*), и для этого понадобится пероглиф лапы дома. Чтобы в этом случае обозначить, что под этим пероглифом в данном случае действительно подразумевается тот предмет, который он изображает, хотя вообще этот пероглиф может употребляться и как чисто слоговой или буквенный знак, к этому знаку прибавляют черточку. Поэтому  означает: «В этом случае знак *pr* действительно обозначает слово *pr*, «дом», поэтому этот знак обозначает самого себя и его не следует соединять с последующими знаками, видя в нем простое соединение согласных *p-r*». Подобным же образом знак  без черточки означает слоговой знак *nh*, а с черточкой  обозначает *nh*, «корзину», т. е. то, что пероглиф изображает.

Или же  есть буквенный знак для *r*, а  есть «рот».

Мы характеризовали, таким образом, особенности египетского письма и сообщили вкратце те факты, которые нам понадобятся в дальнейшем ¹⁾.

Как уже было сказано, превращение этого пероглифического прифига в курсивный иератический носило чисто внешний графический ха-

¹⁾ То, о чем мы говорили здесь, относится главным образом к окончательно-му состоянию египетского письма в том виде, как оно применялось примерно со времени Древнего царства. Ход развития от пиктографии в самом узком смысле слова к этой условной системе письма со знаками, обозначающими од-

ракти. Возможность, пользуясь существовавшими в египетском языке «буквенными знаками», писать всю совокупность египетских слов одними лишь буквами, а не с помощью знаков, сопровождающихся детерминативами и фонетическими дополнениями, никогда не была использована в Египте. Лишь и н о с т р а н н ы е с л о в а, т. е. главным образом иностранные имена лиц и названия местностей, транскрибировались только буквами («силлабическими»).

Быть может, эти написания впоследствии послужили толчком для изобретения действительно буквенного письма у не-египтян. Таким образом и этот случай подтверждает наблюдение, что как раз наиболее важные изобретения обязаны своим возникновением не непрерывному историческому процессу, а р а з р ы в у н е п р е р ы в н о с т и исторического развития.

То, на что мы здесь кратко указали в применении к буквенному письму и что мы несколько подробнее проследили в § 2 в применении к позиционному — именно выработка условной символики как средства выражения — все это до известной степени повторяется еще раз, когда мы имеем дело с другим основным средством выражения человеческой мысли — с ч и с л а м и. В следующей главе мы проследим за развитием числовых понятий и способов их выражения и убедимся в том, что единственная строго систематическая система чисел древности, шестидесятеричная система вавилонской математики, возникла лишь постепенно. Уже в начале этих лекций мы упомянули, что это — позиционная система и что в последнюю эпоху своего существования в ней даже был введен знак нуль для недостающих разрядов внутри числа; появление этого знака имеет параллель в появлении в обыкновенном письме знака, отделяющего друг от друга слова. Но решающий шаг — введение знака нуль, применяющегося во всех случаях, — имел место вне рамок этой культуры, как ни была усовершенствована позиционная система уже в это время; он был сделан в рамках совершенно новой культуры, культуры индийской. Мне кажется, что общей чертой всех этих процессов является следующее: в рамках непрерывного исторического развития, покоящегося на прямой традиции, переходящей из поколения в поколение, совершенно не осознается произвольность и чисто условный символический характер всех выразительных средств; все эти вещи получают характер абсолютных и готовых форм. Всякое произвольное существенное изменение этих форм далеко превышает аналитические возможности людей того времени. Лишь люди, принадлежащие совершенно иной исторической традиции, оказались в состоянии располагать по своему усмотрению чуждыми им выразительными средствами, определив их границы заключающиеся в них возможности.

ну, две или три согласных, с фонетическими дополнениями и детерминативами, трудно охарактеризовать в немногих словах; во всяком случае эти факты не имеют отношения к тем вопросам, которые нас здесь интересуют. Сущность этого процесса заключается в переносе одних и тех же изображений с одного понятия на другое частью на основании смыслового сходства, частью на основании одних только звуковых аналогий (принцип ребуса). Это развитие было строго индивидуальным для каждого отдельного знака. Интересующихся подробностями значений египетских знаков отсылаем к книге Alan H. Gardiner, *Egyptian Grammar*, Oxford 1927 (особенно «Sign-list», стр. 432 и сл.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ II.

а) К главе II в целом.

Предназначенного для широких кругов и не очень объемистого изложения исторического развития переднего Востока от древнейших времен до эллинистической эпохи до сих пор еще не существует. Причина этого, разумеется, в том, что, с одной стороны, в этой книге должны были бы найти свое отражение чрезвычайно сложные и разнообразные процессы, которые почти непонятны, если не останавливаться на подробностях. Сюда присоединяется еще то, что как раз в последние десятилетия была обнаружена такая масса нового и неожиданного материала, что всякий общий обзор через самое короткое время должен устареть. Сказанное относится в большей или меньшей степени и к книгам, которые будут сейчас названы, особенно поскольку они затрагивают сумерийскую историю и историю малоазийских областей.

Еще раз обращаю внимание на то, что прилагаемый список литературы не имеет в виду дать полный перечень источников; здесь цитируются только такие произведения, которые могут помочь читателю с широким кругом интересов получить первоначальную ориентацию в этой области.

(II, 1) Meyer Eduard, *Geschichte des Altertums*, 2—4-е изд., тт. 1 и 2, Stuttgart u. Berlin, Gottasche Buchhandlung, 1913—1931.

(II, 2) The Cambridge Ancient History, Cambridge, University Press, 1923 и сл. (особенно тт. I и II).

(II, 3) Glotz G., *Histoire générale, Histoire ancienne*, Paris, Presses Univ. de France, 1925 и сл.

(II, 4) Bilabel F. r., *Geschichte Vorderasiens und Ägyptens vom 16. bis 44. Jahrhundert v. Chr.* Heidelberg. Winter 1927.

Краткий обзор положения вопроса в настоящее время содержит доклад (II, 5) Götz A. *Das Problem der hurritischen Kultur*, Mededeelingen en Verhandelingen van het Voor-aziatisch egyptisch Gezelschap Ex Oriente Lux, № 1, 1934, стр. 33—43. Там же и более подробные указания литературы.

История Месопотамии.

(II, 6) Woolley C. L., *The Sumerians*, Oxford, Clarendon Press, 1928. Немецкий перевод, *Vor 5000 Jahren*, Stuttgart, Franckhsche Verlagsbuchhandlung, 1929.

(II, 7) Woolley C. L., *Ur of the Chaldees*, London, Benn 1930. Работы Woolley содержат — что важнее всего — отчеты о его имеющих крупное значение новых раскопках из Сумерийской эпохи в Уре. Его отдельным историческим указаниям не всегда можно доверять.

(II, 8) Meissner B., *Babylonien und Assyrien*, тт. 1 и 2, Heidelberg, Winter, 1921—1925. Исключительно богатое собрание материала по культурной истории Вавилона и Ассирии.

(II, 9) Koldewey R., *Das wiedererstehende Babylon*, 4-е изд., Leipzig, Hinrichs, 1924. Книга содержит отчет о многолетних раскопках Кольдевея в Вавилоне и таким образом дает возможность составить представление о жизни и истории города, игравшего главную роль в средней и поздней истории Вавилонии.

Необходимо указать еще на следующие книги, хотя они и посвящены специальным вопросам:

(II, 10) San Nicolò M., *Beiträge zur Rechtsgeschichte im Bereiche der keilschriftlichen Rechtsquellen*, Oslo, Aschehoug, 1931. Эта превосходная работа, как редко какая другая, в состоянии дать представление о культурных достижениях Вавилонии, изображаемой часто как очаг самых диких суверенит и как арена зверских войн.

(II, 11) Карты Месопотамии. Лучшие из известных нам общих карт Месопотамии приведены у Мейсснера (II, 8). Съемки отдельных деталей на картах 1 : 400 000, заснятых во время войны, можно найти в «Kgl. Preussischen Landesaufnahme». Эти карты на юге доходят только до 32°. Новейшие съемки, сделанные англичанами, мне пока недоступны. Схема на рис. 15 основана главным образом на картах, приведенных у Мейсснера (II, 8).

(II, 12) По отдельным вопросам: Ebeling-Meissner, Reallexikon der Assyriologie, Berlin-Leipzig 1928 и сл.

История Египта.

(II, 13). Breasted, J. H. und Ranke H., Geschichte Ägyptens. Berlin, Curtius, 1909.

(II, 14) Erman A. u. Ranke H., Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum, Tübingen, Mohr, 1923. Там же подробные указания на литературу вопроса.

(II, 15) Schäfer H., Von ägyptischer Kunst, 3-е изд., Leipzig, Hinrichs, 1930.

(II, 16) Erman A., Die Literatur der Ägypter, Leipzig, Hinrichs, 1923.

(II, 17) История дешифровки: Hartleben H., Champollion, sein Leben und sein Werk, 2 тома, 1906.

б) К § 2.

(II, 18) История дешифровки: Fosse y Ch., Manuel d'Assyriologie, т. 1, Paris, Leroux, 1904.

К б: (II, 19) Deimel, P. A., Keilschrift-Paläographie, Rom 1929.

(II, 20) Fosse y Ch., Manuel d'Assyriologie, т. 2, Paris, Conrad, 1926. Эта работа доступна только для обладающих предварительной подготовкой в ассириологии. Но даже непосвященный может узнать из этой книги историю развития отдельных знаков, о которой мы по частному случаю говорили в тексте (ср. рис. 20 и 23).

К в: (II, 21) Bergsträsser G., Einführung in die semitischen Sprachen, München 1928.

(II, 22) Meissner B., Die Keilschrift, 2-е изд., Berlin-Leipzig 1922 (Sammlung Götschen).

(II, 23) Fick F. N., Die Sprachstämme des Erdkreises, 3-е изд., Leipzig-Berlin, Teubner, 1923 (Sammlung Aus Natur und Geisteswelt, № 267).

(II, 24) Fick F. N., Die Haupttypen des Sprachbaus, 2-е изд., Leipzig-Berlin, Teubner, 1923 (Sammlung Aus Natur und Geisteswelt, № 268).

в) К § 3.

(II, 25) Erman A., Die Hieroglyphen, Berlin-Leipzig 1917 (Sammlung Götschen).

(II, 26) Müller G., Hieratische Paläographie, 2 тома, Leipzig, Hinrichs, 1927. Примечание к (II, 20) относится и сюда.

(II, 27) Erman A., Ägyptische Grammatik, 4-е изд., Berlin, Reuther u. Reichard, 1928.

Разумеется, как для шумерийского, так и для аккадского и египетского языков существует целый ряд грамматик, но они годятся только для специальных занятий. Характер введения для непосвященных носят только книги, указанные под номерами (II, 22) и (II, 25).

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.

§ 1. СУЩНОСТЬ ВОПРОСА.

Наиболее резкая разница между египетской и вавилонской математикой, бросающаяся в глаза уже при первом взгляде, лежала в области вычислительной техники. Даже для внешней истории догреческой математики чрезвычайно важно выяснить причину этого резкого различия между обеими системами счисления. Не подлежит сомнению, что вавилонская математика никогда не достигла бы столь высокого уровня, если бы в ее распоряжении не было позиционной системы. Но, не говоря уже об этих последствиях, чрезвычайно интересно понять, каким образом две культуры, в основном исходившие из одних и тех же начальных предпосылок, уже в сфере «самых примитивных» выразительных средств, именно в сфере их систем счисления, пошли по самым различным путям.

Главная трудность, на которую наталкивается такое исследование, состоит в том, что развитие системы счисления продолжается в течение чрезвычайно долгого времени и в основном принимает законченный вид уже задолго до начала писаной традиции. Поэтому задача состоит в том, чтобы по возможности установить, зафиксированной в письме единственно нам доступной, реставрировать всю первоначальную историю. Но, с другой стороны, в вопросах такого рода речь может идти не о каких-либо процессах, поддающихся точной датировке, а лишь о таких процессах, которые общи всякой истории математической символики. Поэтому мы можем пользоваться в качестве вспомогательного средства сравнением с существующими еще в настоящее время так называемыми «первобытными» культурами. Языки туземного населения Малайских островов, Центральной Африки и Южной Америки дают нам массу сравнительного материала: благодаря этому материалу мы получаем возможность понять явления, которые должны были быть таковы и в догреческих культурах и служить основанием, на котором были построены исторически засвидетельствованные системы счисления.

Конечно, то, что сейчас будет сказано, дает лишь самые внешние очертания тех явлений, которые были решающими для вавилонской и египетской систем счисления. Нам важно лишь охарактеризовать как общие, так и отличительные черты этих двух систем, а не выяснять во всей ее широте проблему возникновения систем счисления вообще. Такая задача вывела бы нас далеко за поставленные в этой книге рамки. Но необходимо подчеркнуть, что эти проблемы связаны с массой интересных вопросов, естественно приводящих нас в область общей

философии языка вообще. Когда будет выработана проблематика этой дисциплины, она будет служить исходным пунктом для всякого изображения истории развития математики на ее первых ступенях.

Прежде чем перейти к более узкому кругу вопросов из сферы культур Средиземного моря, необходимо кратко охарактеризовать общую проблематику этих вопросов.

Прежде всего ясно, что, говоря о числах и системах счисления, мы под «числом» всегда понимаем только положительное рациональное число. Систему счисления можно было бы назвать «последовательной» только в том случае, когда, при выделении некоторого определенного целого числа $g > 1$ как «основания» системы, всякое целое или дробное число a могло бы быть выражено в виде

$$a = \sum a_g g^n,$$

где коэффициенты a_g — целые числа между 0 и $g-1$. Необходимо здесь же заметить, что такая последовательная система счисления, применяющаяся в письме, была осуществлена в истории только один раз — это применяемая нами десятичная позиционная система. Для устного выражения числовых понятий применялись всегда (и применяются нами) совершенно иные системы, уклоняющиеся от линии такого рода формального развития. Особенно бросается в глаза, что между областью целых чисел и областью дробей проводится в языке резкое различие. Целые числа строятся, например, по десятичной системе, но эта система не простирается на дроби. Так, например, нет ни одного языка, в котором бы $\frac{1}{5}$ выражалась не при помощи называния знаменателя 5; ни в одном языке не применяется выражение, соответствующее десятичному написанию дроби $\frac{1}{5} = 0,2$. Но и в области целых чисел не может быть речи об образовании настоящей системы. В этом можно, например, убедиться из того, что в языке совершенно отсутствуют выражения для больших чисел. Мы познакомимся еще с примерами, характерными в этом отношении.

Обычная процедура, имеющая параллели в большинстве других цифровых систем, сохранилась в особенно отчетливом виде в Египте; ее особенность состоит в том, что отдельные разряды десятичной системы целых чисел: 1, 10, 100, 1000 выражаются каждый особым знаком

1 10 100 1000

причем из самих этих знаков отнюдь не видно, что выражаемые ими числа получаются одно из другого путем умножения на десять. Такие обозначения чисел мы будем в дальнейшем называть «индивидуальными числовыми знаками». Известно, как при помощи таких индивидуальных числовых знаков пишутся остальные числа по методу сложения (пример: по-египетски 323 будет $\overline{\text{с}}\overline{\text{с}}\overline{\text{с}}\overline{\text{п}}\overline{\text{п}}\overline{\text{п}}$). Вавилонский способ написания чисел до 60 также является не чем иным, как таким написанием

по методу сложения с помощью индивидуальных числовых знаков (см. рис. 1 на стр. 20). Вообще вавилонское позиционное написание — это любопытная смесь систематического способа обозначения с обозначением индивидуальным.

Уже из этих немногих замечаний можно видеть, какую массу непоследовательностей можно обнаружить в исторически развившихся системах счисления. Нашей задачей и будет тщательное изучение этих отступлений от сознательной систематики и выяснение их исторических корней. Для истории развития догреческой математики эти вопросы имеют большое принципиальное значение. В этой же главе (§ 4), говоря об истории возникновения вавилонской шестидесятеричной системы, и ниже, при изучении египетского учения о дробях (гл. IV, § 3), мы покажем, что решающие шаги в этом развитии имели своей причиной то, что в ряде целых чисел, а равным образом в области дробей, отсутствует какая бы то ни было однородность. Задачей будущих работ по истории математики должно быть установление того факта, что это явление не есть что-то исключительное, ограниченное областью древнего Египта и Вавилона; что, наоборот, везде и повсюду первоначальный характер числовых образований еще значительно более резко отличается от того понятия числа, которое нам теперь кажется само собой подразумевающимся, чем то, что наблюдается в системах Ассирии и Вавилонии, о которых мы будем говорить подробно на следующих страницах. При этом мы считаем себя вправе уже заранее разграничить обе области — область целых чисел и область дробей — и говорить о каждой отдельно. Лишь в заключение мы исследуем взаимное влияние этих областей друг на друга.

§ 2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

И в области целых чисел часто отсутствует то, что мы привыкли называть «основанием» системы счисления. В очень многих первобытных языках названия чисел совершенно бессистемны; эти названия обусловлены тем, что при сосчитывании предметов их число координируют не только с пальцами, но последовательно переходят к самым различным частям тела, например к пятерне, локтю и т. д. Способы счета такого типа не имеют поэтому определенной структуры и лишены какой бы то ни было системы, основанной на переходе к все более высоким степеням одного и того же основания.

Но и вообще представление, что понятие числа неизбежно должно быть количественным по понятием, совсем не так уж непосредственно истинно. Я хочу этим сказать, что существуют первобытные языки, в которых нет числительных вообще, но имеющиеся числительные зависят от характера перечисляемых предметов. Такой способ счета называют счетом при помощи «счетных классов». При этом числительные присоединяются к исчисляемым предметам как прилагательные, выражающие свойство, а следовательно, качество. Таким образом в этих языках вовсе не стремятся к тому, чтобы отметить то, что общее трем живым предметам с тремя какими бы то ни было другими, и охарактеризовать эту общность отвлеченным числитель-

ным. Для восприятия человека, стоящего на этой стадии, совершенно не представляет интереса констатирование того факта, что такое абстрактное свойство может быть приписано как некоторому одному кругу предметов, так и некоторому другому. Его интересует лишь то, что один определенный тип предметов встречается в тройном виде ¹⁾.

Следует ожидать, что это явление должно вызвать большую сложность и запутанность языка. И действительно, примитивные языки построены ничуть не проще, чем языки культурных народов, стоящие на высшей ступени развития. Наоборот, в этих языках, например, глагол несравненно более богат формами, чем в языках культурных народов. Причина этого явления заключается в том, что языку первоначально чужд какой бы то ни было принцип экономии; он стремится как можно более подробно охарактеризовать каждое отдельное явление. Примитивный язык не удовлетворяется столь общим способом обозначения, как, например, настоящее или прошедшее время. Он пытается еще охарактеризовать, было ли прошедшее действие однократным или длительным, продолжается ли оно и в настоящее время или нет, было ли оно обычным или имело известную интенсивность, направлено ли оно на какой-либо предмет или, наоборот, имеет источником этот предмет и т. д. Для выражения всех этих возможностей создают особые соответственные формы. Равным образом оказывается недостаточным и простое противопоставление единственного и множественного числа: ряду языков свойственно особенное двойственное, тройственное и даже четверное число — явления, которые сохранились в культурных языках, например в греческом ²⁾.

Первая фаза в истории возникновения отвлеченных числовых понятий характеризуется изображением исчисляемых множеств при помощи определенных условных символов, как, например, числовых жестов, частей тела, изображений предметов. Разумеется, и этой стадии еще далеко до действительно отвлеченного изображения чисел; ведь система, с которой здесь числа приводятся в соответствие, есть все еще определенная заданная в наглядных образах система, так что и здесь числа еще «привязаны к наглядности». Но то, что этим достигается, есть уже во всяком случае существенный шаг; в самом деле, мы имеем уже дело с изображением всех исчисляемых множеств при помощи одной определенной системы, приведенной в соответствие с ними. Однако такой способ изображения еще не имеет необходимым следствием расположение чисел в систему, как мы это можем видеть, например, на числах, изображаемых при помощи частей тела и дающих возможность записать количества вплоть до чисел свыше 30. Можно было бы думать, что сравнительная ограниченность такого рода числовых образований с необходимостью должна приводить к повторениям

¹⁾ Все эти явления надо, разумеется, объяснять тем, что в сфере первобытных культур речь идет прежде всего об индивидуальном известных множествах, увеличение или уменьшение которых воспринимается как присоединение или недостаток определенных индивидуумов. Таким образом речь идет не о меньшей «способности абстракции», а о совершенно ином направлении интересов по сравнению с нами.

²⁾ Ср., например, развитие двойственного числа в греческом языке: Wacker n a g e l, Vorlesungen über Syntax, 2-е изд., т. 1, стр. 80 и сл.

и таким образом к возникновению системы. Но и это не всегда верно. Так, существуют такого рода примеры счета с числами, изображаемым при помощи тела: когда все координированные с числами точки, находящиеся на одном человеке, исчерпаны, приходится привлечь второго человека; таким образом счет и в этом случае не сводится к чисто формальному повторению.

Но, конечно, с другой стороны, изображение множеств при помощи известных небольших групп обычно служит поводом к образованию системы. Таково прежде всего изображение при помощи пальцев, приводящее к соответственным системам пятерок или десятков; еще более глубокие результаты дает изображение помощью пары, приводящее к предпочтению системы двоек; эта система выражается в языке в виде двойственного числа, в вычислительной технике — в том, например, способе умножения, который применялся в Египте.

Там, где возникает такая систематика, троячность образует почти всегда глубокий водораздел. Обычно это происходит в той форме, что на первых порах троячность воспринимается просто как символ множественности. Красивой иллюстрацией к этому является египетское письмо, в котором для обозначения множественного числа первоначально просто повторяли три раза соответствующее иероглифическое изображение. В более позднем письме отсюда получились три черточки (совпадающие с числовым знаком для 3) как детерминатив множественного числа (см. выше, стр. 92). Подобные явления можно наблюдать и в других случаях. Так, например, один из шумерийских диалектов выражает числительные 4, 5, 6 и 7 следующими словами:

3 прошло

3 прошло и 1

3 прошло и 1 и 1

3 3 и 1

тогда как классический шумерийский язык сохраняет следы пятеричной основы, например $5 + 1$ или $5 + 2$ для 6 и 7 и $5 + 4$ для 9.

Таким образом повторение небольших групп приводит в языке к образованию некоторой системы; аналогично этому и соединение числовых знаков приводит к некоторой систематике. Примером могут служить данные на рис. 27 древнеегипетские числовые знаки; здесь числовые знаки до 9 группируются по четверной системе, затем идет особый числовой знак для 10, так что здесь в четверную систему включается десятичная.

О действительной системе речь может идти только в том случае, когда отдельные групповые знаки начинают присчитываться друг к другу, будучи осознаны как групповые знаки, как это наблюдается в египетской системе чисел.

Здесь соответствующие символы присчитываются друг к другу до достижения ближайшей высшей ступени. Именно, присчитывают до 9 знаков единицы I, до 9 знаков десятки X и т. д. Но и на египетских числовых знаках еще ясно видно их происхождение от чисел, связанных с наглядными образами. Чисто символическими знаками являются

только единицы до 10. Происхождение знака $\cap$ для 10 еще не выяснено ¹⁾. Знак $\textcircled{0}$ для 100 представляет собой изображение измерительной рулетки («метра»), иными словами, относится к определенной мере длины. Знак $\textcircled{1}$ для 1000 был первоначально несомненно символом для

обозначения просто множественного числа, как это совершенно ясно видно еще из формул заупокойной службы, в которых покойникам желают всегда «1000» хлебов, пива и других продуктов; ясно, что эти выражения имеют смысл неопределенного множества. Существовали также особые знаки для более высоких чисел: для 10 000, 100 000 и 1 000 000. Особенно интересно наблюдение, что эти высшие числовые знаки постепенно снова выходят из употребления, и притом в убывающем порядке: 1 000 000 исчезает уже в Новом царстве, 100 000 — в демотическом языке и, наконец, 10 000 — в коптском; это происходит тем путем, что эти числа постепенно снова начинают обозначать неопределенные множества, а затем и вовсе выходят из употребления ²⁾.

В египетском языке сохранились еще некоторые reminiscences счета числовыми классами. Так, некоторые меры сыпучих тел («четверки») обозначаются особыми числовыми знаками. Одна определенная малая мера сыпучих тел (0,17 л) обозначалась иероглифом $\textcircled{0}$ r, «рот». С этим знаком мы еще познакомимся сейчас как с символом для дроби вообще.

§ 3. ДРОБИ.

С точки зрения представлений нынешнего человека понятия различных дробей не отличаются уже существенно друг от друга: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$ кажутся нам принципиально однородными выражениями; это положение вещей еще более подчеркивается нашим однообразным обозначением при помощи числителя и знаменателя. То, что такое положение вещей не всегда имело место, видно хотя бы из того, что у египтян для дроби вида $\frac{17}{25}$ вообще не существовало никакого обозначения, для $\frac{1}{20}$ существовало только обозначение, при котором числитель 1 никак не отмечался, а для $\frac{1}{2}$ применялся символ, совершенно иной, чем для

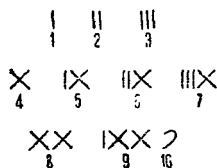


Рис. 27.

¹⁾ Этот знак принадлежит к числу тех немногих иероглифов, смысл которых как изображений не вполне ясен. Обычно в нем видят путь для стреноживания коров.

²⁾ Это обратное развитие высших египетских числительных стоит в связи с тем, что элементы населения страны, бывшие носителями непрерывно развивавшегося египетского языка, в культурном отношении все более и более отгеснялись на задний план. После развала Нового царства в высшем правящем культурном слое все более начинают преобладать не-египтяне (например в эпоху персидского, затем македонского, греческого и, наконец, арабского господства). Здесь мы имеем особенно отчетливый в историческом смысле пример того, насколько тесно связаны числовые понятия с культурным и экономическим положением населения.

других дробей (см. ниже). Неоднородность в первоначальном образовании понятий, уже отмеченная нами в области целых чисел, снова дает себя знать в области дробей; поэтому нашей ближайшей задачей должно быть несколько более подробное освещение относящихся сюда явлений, в результате чего мы сможем прийти к определенной их классификации. Египетское обозначение дробей состоит в том, что перед обычными числовыми знаками ставится иероглиф $\ominus$ *r*. Из рис. 28 видно, как этот знак соединяется с числовыми знаками.

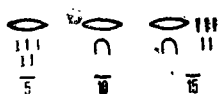


Рис. 28.

Мы уже упомянули, что этот знак употреблялся и как конкретная мера, именно для обозначения 0,17 л. Происхождение отвлеченных обозначений для дробей из слов, первоначально обозначавших определенную меру, впрочем, — совсем не редкий случай; мы скоро встретимся с этим явлением снова, когда будем говорить о римских и вавилонских обозначениях для дробей.

Обозначение дробей при помощи знака *r*, «часть», прибавляемого к числовому знаку знаменателя, не применялось к небольшой группе дробей, где был в ходу другой способ обозначения. Так, прежде всего $\frac{1}{2}$ изображалась особым иероглифом $\llcorner$, который транскрибируется как *gs* и означает приблизительно «сторона», «половина». Далее для $\frac{1}{4}$ употреблялся знак $\times$, применяемый как детерминатив, выражающий понятие «разламывать»¹⁾. Этот знак в древнейшее время применялся в определенной системе мер, именно, в некоторых случаях при измерении площадей специальными мерами (арурами). Но наряду с ним встречается и обозначение при помощи знака |||| . Кроме перечисленных знаков для дробей, существовало еще три знака (рис. 29), которые на первый взгляд следует читать как *r* 1, *r* 2 и *r* 3, т. е. как $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ ²⁾.



Рис. 29.

Однако это толкование совершенно неверно: в действительности два первых означают, соответственно, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, а третий $\frac{3}{4}$. Иными словами, выражение «одна часть» означало тогда $\frac{1}{3}$, «две части» $\frac{2}{3}$ и «три части» $\frac{3}{4}$. Знаки $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$ вышли из употребления уже очень рано, знак же $\frac{2}{3}$, «две части», напротив, всегда оставался в употреблении и, таким образом, стал в египетской математике единственным символом дробей, имеющей числителем не единицу. В дальнейшем, применяя выражение «основные дроби», мы будем иметь в виду кроме дробей с числителем 1 всегда еще и $\frac{2}{3}$.

¹⁾ Ср. старорусское выражение «ломаные» вместо «дроби». *Переводчик.*

²⁾ Первый знак реконструирован из глоссографического письма; что касается второго и третьего, то вверху каждый раз изображена более старая, внизу — более новая форма.

Знак $\frac{1}{3}$ в более позднее время всегда изображается в виде $\ominus$; особый же знак для $\frac{3}{4}$ исчезает и вместо $\frac{3}{4}$ пишут $\text{—} \times$, т. е. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

В клинописи также существуют особые знаки для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ ¹⁾. Как показывают начертания этих знаков, употреблявшиеся в древнейшее время (см. верхний ряд на рис. 30) и представляющие собой изображение сосудов, они несомненно возникли как обозначения мер. Наряду с этими обозначениями, для $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ применялось и обозначение *igi n gál*, общее для всех дробей с любым другим знаменателем *n*, именно: *igi 2 gál* и *igi 3 gál*. К $\frac{2}{3}$ такой способ обозначения не мог быть, конечно, применен.

Уже эти немногочисленные факты показывают, что и в сфере дробей не может быть речи об однообразном и последовательном способе обозначения. Наиболее показательное египетское обозначение $\frac{2}{3}$ через $\text{—} 2$; этот знак по аналогии с другими такими же мог бы означать только $\frac{1}{2}$. Примененный здесь способ обозначения показывает, таким образом, что то представление, которое его породило, должно было быть совершенно иным, чем то, из которого исходило обычное обозначение дробей. Чтобы дать этому обстоятельству и внешнее отображение, мы будем обозначения дробей делить на две категории. К малочисленной группе дробей мы будем применять термины «индивидуальные обозначения», противопоставляя им «алгоритмические обозначения», т. е. те дроби, в которых, чисто схематическим путем, знаменатель характеризуется соответственным числовым знаком или числителем. В египетском языке согласно этому определению алгоритмическими будут выражения, обозначенные иами в виде $r n$ (n — любое целое число), т. е. $\frac{r}{n} = 1 : n$. Индивидуальными же обозначениями будут знаки — и $\times$ для $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ и знак для $\frac{3}{4}$ на рис. 29. В вавилонском письме алгоритмическими обозначениями будут обозначения типа *igi n gál* или транскрипция их в виде шестидесятеричных дробей. Напротив, изображенные на рис. 30 специальные знаки для $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ являются индивидуальными обозначениями.

Особую роль и в языке, и в письме играют «дополнительные дроби», т. е. дроби вида $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Такой дополнительной дробью является, например, дробь, $\frac{2}{3}$. Мы сейчас увидим, что в сфере небольших дробей эти дополнительные дроби играют роль основных дробей, т. е. представ-

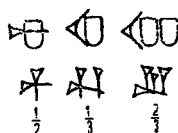


Рис. 30.

¹⁾ О дробях $\frac{5}{6}$ см. ниже стр. 110 и стр. 115, сноска.

ляют собой самостоятельные понятия. В этом и заключается причина того обстоятельства, что дробь $\frac{2}{3}$ фигурирует всегда как равноправная с другими основными дробями, хотя на первый взгляд это кажется нарушением принципа, по которому египетское учение о дробях допускает только операции с основными дробями. Действительное положение вещей не носит того формального характера, который мы придаем ему, определяя основную дробь как «дробь с числителем 1»; в действительности дело лишь в том, что определенная область дробей естественным образом впервые привлекает к себе внимание и входит в употребление. Таковы прежде всего те дроби, которым придаются индивидуальные обозначения. К этой области относятся всегда кроме основных дробей также и их дополнительные дроби, отличающиеся от единицы каждый раз на соответствующую основную дробь. Всю эту область мы будем называть областью *натуральных дробей*. Их значение состоит в том, что они являются совершенно самостоятельными, индивидуальными числовыми понятиями, не являющимися вторичными образованиями, произведенными от соответствующих целых чисел. Напротив, к понятию дроби другого типа приходят только в процессе усовершенствования практического счета; эту область мы называем областью *алгорифмических дробей*. Эти алгорифмические дроби в отношении их выражения как в языке, так и в письме непосредственно выводятся из соответствующих целых чисел. Ниже на подробном разборе материала мы убедимся, что это противопоставление «натуральных» и «алгорифмических» дробей является основой для понимания наиболее важных явлений в интересующем нас здесь развитии математики.

Однако предварительно мы дадим обзор, освещающий смысл этих понятий на отдельных примерах. Изучение помещенной здесь таблицы (рис. 31) мы начнем с правого столбца. Индивидуальные обозначения всюду отмечаются путем двойного обрамления соответствующей клетки; обозначения же дополнительных дробей отмечаются пунктирной рамкой. Как и во всех других языках, латинское слово *setis* для обозначения деления пополам представляет собой типичный случай индивидуального обозначения, не связанного со словом «два». То же можно сказать и для всех других словесных обозначений для $\frac{1}{2}$ в первом ряду. Символы для этого числа также не связаны с обычными числовыми знаками для 2, исключая лишь клинописи, где, правда, имеется и индивидуальное обозначение для $\frac{1}{2}$, но наряду с ним существовало и данное во второй строке обозначение *igi 2 gál*, всецело примыкающее к числовому понятию 2 («величина, обратная 2»), т. е. представляющее собою нечто такое, чего не существует ни в каком другом языке. Соответственно этому и способ записания в виде 30, т. е. 0;30, выведен лишь из общей алгорифмической схемы шестидесятеричных дробей. Таким образом во всем нашем обзоре вавилонский способ выражения при помощи *igi ... gál* или при помощи шестидесятеричных дробей представляет собой единственный случай, когда систематический, алгориф-

мический способ выражения существует для всех без исключения дробей. Поэтому весьма важно изучить также и языковые и прочие формы

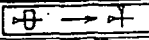
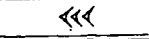
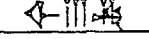
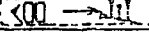
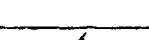
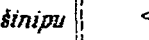
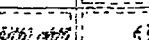
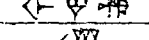
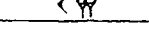
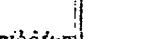
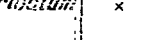
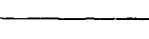
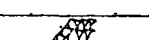
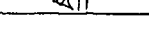
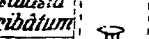
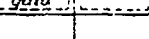
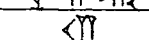
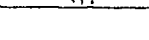
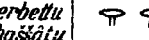
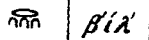
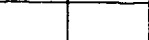
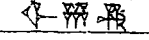
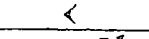
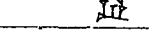
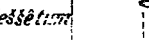
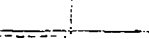
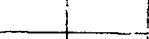
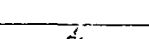
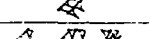
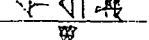
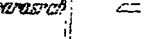
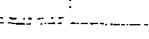
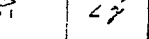
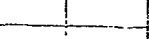
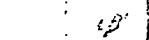
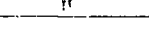
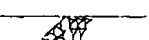
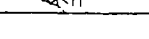
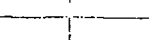
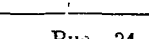
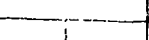
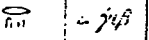
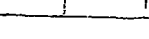
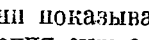
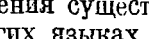
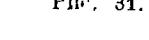
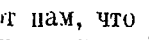
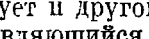
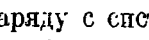
	Сумерийский	Akkadский	Египетский	Греческий	Латинский
$\frac{1}{2}$	<i>suria</i>   	<i>mišlum</i> 	 gs	Ζ	ἥμισι <i>semis</i>
$\frac{1}{3}$	<i>susan</i>   	<i>sušan</i>  <i>saššātu</i> 	 	γ τὸ τρίτον (μέρος)	<i>triens</i>
$\frac{2}{3}$	<i>šapšē</i>   	<i>šinipu</i>  <i>šiši qātā</i> 	 53-wj	β τὰ δύο μέρη	<i>bes</i> (-binje partes)
$\frac{1}{4}$	  	<i>ribātum</i>  	 x	δ τὸ τέταρτον μέρος	<i>quarto pars</i> <i>quadrans</i>
$\frac{3}{4}$	  	<i>šaššātu</i> <i>ribātum</i> <i>šaššātu</i> <i>qātā</i>   	 x	Δδ τὰ τρία μέρη	<i>tres partes</i> <i>drans</i> (-de quadrans)
$\frac{1}{5}$	  	<i>haššatum</i>  	 	Ε τὸ πέμπτον μέρος	<i>quinta pars</i>
$\frac{4}{5}$	  	<i>erbellu</i> <i>haššātu</i>  	  	Βίλ τὰ τέσσαρα μέρη	<i>quattuor quintae partes</i>
$\frac{1}{6}$	  	<i>šeššatum</i>  	 	ς τὸ ἕκτον μέρος	<i>sexta pars</i> <i>sextans</i>
$\frac{5}{6}$	<i>kinguške</i>   	<i>kinguške</i>   	  	Ζγ τὸ ἑπτὰ μέρος	<i>septa et triens</i> <i>drans</i> (de sextans) <i>drans</i> (de sextans)
$\frac{1}{12}$	  	  	  	ζδ τὸ δώδεκον μέρος	<i>uncia</i>
$\frac{11}{12}$	  	  	  	ζδ τὸ ἑξήκον μέρος	<i>drans</i> (-de uncia)

Рис. 31.

выражения: они показывают нам, что наряду с систематическим способом обозначения существует и другой, построенный так же, как и способ, в других языках являющийся единственным.

Перейдем ко второму горизонтальному ряду в нашей таблице, к дроби $\frac{1}{3}$. Латинское, греческое и одно из египетских выражений, именно $r3$, оказываются алгорифмическими; напротив, старинный египетский способ написания в виде $r1$ является типичным индивидуальным обозначением (о нем мы уже говорили выше). Это становится сразу понятным, если принять во внимание стоящее в следующем, третьем ряду обозначение для $\frac{2}{3}$ («2 части»). Такой способ выражения — «2 части» — не ограничен египетским языком: он существует равным образом в латинском, греческом (как в разговорном, так и в числовом языке), а также и в аккадском, где *šittá qâtá* (дословно: «обе руки»), очевидно, является аналогичным образованием. Что же касается аккадского обозначения *šiniri*, то это, повидимому, только аккадское видоизменение сумерийского обозначения *šanabi*; происхождение же последнего слова пока не выяснено. Сказанное относится к аккадскому обозначению для $\frac{1}{3}$; *šalšátu* есть образование типа порядкового числительного, восходящее к числительному три, а *šuššán*, повидимому, восходит к сумерийскому обозначению *šušān*, происхождение которого также неясно. Повидимому, речь идет и в этом случае об индивидуальных обозначениях.

Что касается дроби $\frac{1}{4}$, то в Египте, как мы видим, допускаются оба способа выражения — при помощи индивидуального знака и при помощи алгорифмического обозначения. Все прочие выражения, данные в этом ряду, — чисто алгорифмического характера.

Обозначения для $\frac{3}{4}$ в египетском письме также распадаются на две группы: на старое обозначение типа дополнительной дроби, как «3 части», и на обычное обозначение в виде $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, встречающиеся также в греческом письме. Греческое выражение *τὰ τρία μέρη*, т. е. «три части», точно соответствует латинскому обозначению «*tres partes*» и является также характерным обозначением типа дополнительной дроби, имеющим совершенно тот же характер, как и аккадское обозначение *šalāšlá qâtá*, дословно: «три руки» (ср. аккадское обозначение для $\frac{2}{3}$). Другим видом обозначения типа дополнительных дробей является латинское слово *dodrans*, получившееся из *de quadrans*, «без четверти». Наконец, аккадское обозначение *šalāšlu ribátum* вполне аналогично нашему обозначению «три четверти».

Все приведенные в таблице обозначения для $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$ алгорифмичны.

Аккадское обозначение для $\frac{4}{5}$, равно как и римское, также аналогично нашему. Греческое обозначение, напротив, является обозначением типа дополнительной дроби. С совершенно новым типом мы встречаемся в египетских и греческих обозначениях этих чисел: в обоих случаях $\frac{4}{5}$ разворачивается в $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. Здесь уже вступает в силу чисто

математическое преобразование, с которым мы, в частности для Египта, познакомимся ниже подробнее. Это выражение получается тем путем, что, руководясь вполне определенным правилом, преобразуют $\frac{2}{5}$ в $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, а затем путем удвоения (опять-таки после применения определенного правила для преобразования $\frac{2}{15}$) получается $\frac{2}{3} + (\frac{1}{10} + \frac{1}{30})$.

Еще раз встречаемся мы с таким разложением при $\frac{5}{6}$, именно, эта дробь пишется в виде $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (египетское, греческое и первое латинское обозначение). В шумерийском языке неожиданно появляется особое обозначение, именно *kingusila*, вероятно, связанное с обозначением каких-то мер (*sila* — название какой-то меры). Аккадское обозначение для этой дроби представляет собой обозначение типа дополнительной дроби (дословно: «большая часть»). Аккадский числовой знак для $\frac{5}{6}$ имеет очевидное сходство в очертаниях с соответствующими знаками для $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, но древнейшая форма знака, из которой эта форма возникла, до сих пор неизвестна. К этому вопросу мы еще вернемся. В латинском языке *dextrans* есть опять же обозначение типа дополнительной дроби, аналогичное выражению *dodrans* для $\frac{3}{4}$. Но в латинском мы встречаемся и с совершенно новым типом обозначения: $\frac{5}{6}$ называется *desunx*. Это означает просто «десять унций». Как видно из следующего, предпоследнего ряда, измерительная или, вернее, денежная единица *uncia*, равная $\frac{1}{12}$ *assa*, стала обозначением для этой дроби вообще. Это еще один пример перехода от конкретных измерительных обозначений к общим обозначениям дробей. Это разделение на унции привело в латинском языке к интересному обозначению типа дополнительных дробей: слово *deunx* обозначает $\frac{11}{12}$, дробь, обозначаемую в египетском и греческом письме в виде $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. Только в шестидесятеричной системе эту дробь можно случайно выразить одним символом, именно 0;55.

Весь этот материал приводит нас к выводу, что возможности выражения в области простейших дробей чрезвычайно разнообразны как по способу написания, так и по их обозначению в языке. И в этом случае бросается в глаза разница между Египтом и Вавилонией. Правда, и в Вавилонии существовали индивидуальные обозначения; но здесь систематика обладала такой силой, что однообразный способ обозначения алгорифмических дробей подчинил себе сплошь все дроби. Таким образом в вавилонской системе счисления, по крайней мере в конце ее развития, было полностью достигнуто то, что нам теперь, с точки зрения наших нынешних способов счета, кажется уже само собой подразумеваемым.

Прежде чем мы займемся рассмотрением вопроса, как отразились разобранные здесь явления на математике в собственном смысле, скажем еще попутно о наблюдении, сделанном К. Зете (K. Sethe), имеющем большое принципиальное значение. Заслуга Зете состоит прежде всего в том, что он, исходя из египетского материала, исследовал во всех подробностях те вопросы, которые мы только что разбирали. При этом он впервые указал на своеобразный способ обозначений дополнительных дробей, примером которого является обозначение «две части» для $\frac{2}{3}$. Такое обозначение имеет смысл только в том случае, когда уже известно, на сколько частей разлагается единица. Равным образом, обозначение основных дробей при помощи порядковых числительных («третья часть», «одна третья» для $\frac{1}{3}$) предполагает уже известным, что единица делится на три части: ведь, вообще говоря, под «третьей частью» могла разумеаться «третья» часть в любом ряде дробных частей, например $\frac{3}{25}$. Таким образом как обозначения основных

дробей, так и обозначения дополнительных дробей имеют смысл только в том случае, если уже заранее предполагается деление единицы на определенное число частей. Далее из языковой картины с несомненностью вытекает следующее: дополнительная дробь означает только $n-1$ часть единицы, разделенной на n частей; основная же дробь обозначает эту последнюю, именно n -ую часть, дополняющую эти $n-1$ малых единиц до первоначальной большой единицы. Таким образом порядковые числительные, служащие для обозначения основных дробей, уже имеют необходимой предпосылкой существование соответственного числа малых единиц; иными словами, порядковые числительные — вторичное явление по сравнению с количественными.

Эти явления Зете проследил во всех подробностях; так, например, он указал на то, что в египетском языке не говорили «разделить на 8», а «превратить в восьмеричность» (в нечто состоящее из 8 вещей). Таким образом здесь под делением совершенно определенно понимается образование некоторого количества вещей. Равным образом подтверждается и то, что порядковое числительное есть вторичное понятие, являющееся завершением процесса деления. Как в египетском, так и в санскритском языках существуют обозначения порядковых числительных, лексическое значение которых — «дополняющий до целого», т. е. смысл этих слов как раз тот, который вытекает из нашего толкования основных дробей как дополнения до единицы, так называемых дополнительных дробей.

Эти вещи, быть может, не лишены существенного значения: дело в том, что в литературе, отпавляющей от философских предпосылок, был постулирован приоритет понятия порядкового числа по отношению к числу кардинальному. Огмеченные мною здесь факты показывают, что исторические процессы нельзя сводить к столь простой формуле. Фактическое положение вещей значительно более сложно. Уже самый ряд последовательных чисел не представляет собою замкнутого единого целого. Он возникает лишь постепенно, и в рамках этого процесса образование порядковых чисел, как оказывается, имеет

предпосылкой существование кардинальных, а не наоборот. Фактическое историческое развитие дает во всех случаях значительно более богатую картину, чем можно было бы предполагать на основании чисто теоретических конструкций. Поэтому всякие суждения из области истории могут иметь значение только в том случае, если они могут быть подтверждены действительно богатым фактическим материалом.

§ 4. ШЕСТИДЕСЯТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА.

Мы начали наши исследования с того, что ознакомились с вавилонской вычислительной техникой. Мы видели, что она основана на позиционном характере шестидесятеричной системы счисления и что с практической стороны, исключая величины основания, она мало чем отличается от нашей десятичной системы. Теперь нам следует поставить вопрос иначе, не довольствуясь уже теми *п р и м е н е н и я м* и готовой системы, которые имеют место в математических текстах. Мы попытаемся теперь проанализировать те процессы, которые послужили *о т п р а в л я ю щ е м* н у ж д о м для образования системы чисел такого типа; при этом нам, само собой разумеется, придется заниматься вопросами, которые сами по себе не относятся к области математики. Впрочем, уже на математических текстах, именно на таблицах обратных значений, нам удалось показать, что однообразная позиционная система восходит к такой ступени развития, когда существовали еще *а б с о л ю т н ы е* обозначения для дробей, именно — особые обозначения для $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Для развития математики было фактом исключительного значения то, что удалось освободиться от различного подхода к таким индивидуальным обозначениям, с одной стороны, и алгоритмически-систематическим, с другой, — и что все рациональные числа, поскольку они могут быть выражены в виде конечных шестидесятеричных дробей, стали писаться действительно по такой шестидесятеричной системе. Однако для целей, которые мы преследуем в настоящей главе, математические тексты имеют лишь второстепенное значение. Нам необходимо познакомиться со всякого рода своеобразными явлениями в вавилонской системе счисления, что даст нам возможность дополнить наши наблюдения еще целым рядом фактов, выходящих за рамки не только математических таблиц, но даже и собственно математических текстов. Только научившись ориентироваться во всей этой обширной сфере фактов, мы сможем сделать попытку реконструировать то историческое развитие, последним достижением которого является позиционная система счисления, применяемая в математических текстах.

Выводом из этих наблюдений будет то, что *п о з и ц и о н н ы й* характер шестидесятеричной системы (необходимо все время снова и снова подчеркивать, что дело именно в этом) имеет своим источником взаимоотношение между возникновением этой системы счисления и ходом развития систем мер (это даст нам в то же время приемлемое объяснение для принятия за основание числа 60). Нам придется, таким образом, иметь дело с сравнительно большой сферой явлений: мы не сможем ограничиться только собственно числовыми понятиями, нам

придется углубляться в некоторые детали своеобразной истории метрологических обозначений. Наконец, в разделе в) (особенно на стр. 123 и сл.) мы дадим краткое резюме.

а) Фактический материал. Постановка вопроса.

Последней стадией развития математики и астрономии в Вавилонии была математика и астрономия нововавилонской и селевкидской эпохи, представленная, главным образом, текстами из Урука. К этому времени относится, между прочим, большая таблица обратных значений, подробно разобранный нами выше в гл. I, § 1, в). Система, применяемая в них, разумеется, есть система шестидесятеричная, причем внутри числа применяется и знак нуля. Нам известен и один собственный математический текст этого времени: здесь мы имеем последнюю стадию развития вычислительной техники и наряду с шестидесятеричными обозначениями встречаем и десятичную транскрипцию, например для 1,48 обозначение *1 me 8*, т. е. «1 сотня 8» (числительное *me*, «сто», было, кстати, первоначально просто шумерийским обозначением множественного числа).

Таким образом мы имеем здесь такое обозначение числа, в котором десятичный характер соединяется с абсолютным обозначением разрядов. При этом обозначении чисел понятия «сотни» и «тысячи» выражаются особыми числительными, именно *теи* и *кити*, тогда как числа между 60 и 100 пишутся позиционно по шестидесятеричной системе; так, например, вместо 270 пишут *2 me 1, 10*. Эта система счисления применялась в нематематических текстах уже ранее начала второго тысячелетия (так, например, она применяется в хеттских текстах, относящихся к 1800—1200 гг., и соответственно в ассирийских текстах, начиная с древнеассирийских).

Итак, мы встречаемся с удивительной системой счисления: для всех чисел до 60 она оперирует индивидуальными знаками для единиц и десятков; для чисел от 60 до 100 применяется позиционное обозначение с основанием 60; для больших чисел применяется снова десятичная система, но с буквенно выписываемыми числительными для разрядов сотен и тысяч, к которым присоединяются обычные числовые знаки. Мы видим, таким образом, что в этой нематематической системе десятичный характер значительно преобладает, но и шестидесятеричная система не вытеснена совсем; этому соответствует тот факт, что и во вполне развитой шестидесятеричной системе при числах до 60 мы всегда — без единого исключения — встречаемся с тем явлением, что 10 является подразделением, с которого счет начинается сызнова.

Если мы теперь рассмотрим с той же точки зрения числовые обозначения древневавилонской эпохи, то мы не встретим знака для нуля, а в математических текстах не встретим и десятичной транскрипции. Зато в математических текстах наряду с шестидесятеричными обозначениями часто встречаются также индивидуальные обозначения для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$ (для $\frac{5}{6}$, правда, очень редко).

Теперь надо обратить внимание еще на одно явление, часто дающее себя знать и в математических текстах: некоторые меры обозначаются с о б ы м и числовыми знаками. Это — прежде всего меры площадей (gán или ikú, т. е. приблизительно «поле»). До 5 gán эти меры пишутся при помощи л е ж а щ и х числовых знаков (рис. 32); 6 gán образуют новую меру, именно 1 е še, которой также соответствует числовой знак (лежащая 1 с присоединенным к ней крючком). Для обозначения 12 gán или 2 е še пишут два раза знак для 1 е še (рис. 32). Наконец, 18 gán или 3 е še образуют опять новую единицу, именно 1 bùr. Для обозначения этой единицы мер применяется обыкновенный числовой знак для 10, именно угловатый крючок; таким образом числовой знак 10, когда он применяется для обозначения меры площади, уже не означает 10, а имеет значение 1 bùr = 3 е še = 18 gán. Мы еще вернемся к этому чрезвычайно своеобразному явлению.

Все, о чем мы говорили до сих пор, принадлежит к промежутку времени, от которого до нас дошли еще математические тексты. Теперь мы перейдем к периоду, поскольку мы можем судить, п р е д ш е с т в у ю щ е м у возникновению математической литературы. Мы начнем с того, что вернемся ко времени последнего расцвета шумерийской культуры, а затем уже перейдем к наиболее древним из доступных нам типов текстов.

Уже в главе, посвященной истории письма, мы говорили о том, что клинописные знаки возникли из знаков более древней и более округленной формы. О знаках 1 и 10 мы уже говорили (ср. стр. 67 и сл.), равно как и о знаках для $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; эти знаки восходят к первоначальным обозначениям мер. Это видно прежде всего из формы знака для $\frac{1}{2}$, который одновременно употреблялся и как знак для определенной меры жидкостей и сыпучих тел, именно 1 ban (рис. 30, стр. 103; это обозначение встречается еще в более поздних текстах).

Характерной чертой «шестидесятеричной системы», применяемой в математических текстах, является употребление числового знака 1 и для 60. На той более древней стадии, о которой мы здесь говорим, положение вещей еще совершенно иное: 60 обозначается, правда, уже в эту эпоху тем же знаком, что и единица, но этот знак имеет значительно большую величину, чем обычный знак для единицы. Следовательно, это числовое обозначение нельзя еще считать позиционным: 60 — если можно так выразиться, как «большая единица» — резко отличается от обыкновенной единицы, так что неопределенность шестидесятеричной позиционной системы оказывается результатом последующего отождествления первоначально различных знаков (рис. 33). Таким образом в этот период еще о т с у т с т в у е т одна из важнейших характерных особенностей этой системы в ее более позднем виде, именно — не-

	1 gán
	2 gán
	3 gán
	4 gán
	5 gán
	1 е še-6 gán
	2 е še
	1 bùr = 3 е še
	2 bùr

Рис. 32.

определенность позиции. Наоборот, эта система счисления сходна по типу с египетской — она имеет индивидуальный знак для 1, для 10 и для следующего разряда. Отличие от египетского состоит в том, что, с одной стороны, этим ближайшим разрядом в Египте служит 100, в Вавилоне 60, с другой же стороны, этот разряд в действительности не примыкает непосредственно к предшествующим знакам, а является лишь исходным пунктом, с которого счет начинается сызнова, но при помощи увеличенной единицы. Это особенно ясно из ближайшего

следующего подразделение: знак, соответствующий ему, представляет собою комбинацию знаков «большая единица» и «10» и означает соответственно 10 больших единиц, т. е. 600 (рис. 33). В позиционной системе более позднего времени 600 не отличается от 10; здесь же перед нами абсолютное числовое обозначение. Ближайшему и первоначально последнему разряду и

∅	┐	1
○	<	10
∅	┐	60
⊙	✕	10 · 60
○	☆	3600
⊙	✧	60 · 3600
	✧	60 · 3600 обозначается также через šār-gal (т. е. большой šār)

Рис. 33.

этой древней системе соответствовал знак, получавшийся путем вдавливания круглого предмета; он назывался šār и означал 3600. Как из значения этого слова, так и из его клинописного эквивалента (рис. 33) ясно, что мы здесь имеем дело никак не с увеличенным знаком для десятка, а с изображением круга. Это — одно из тех числовых обозначений, которые первоначально обозначали не-

ограниченное множество и только; они не соответствовали никакому точно определенному понятию числа. «Круг» здесь имеет тот же смысл, что «мировой круг» (*orbis terrarum*), «все», и со стороны содержания представления соответствует египетскому негроглифу  для 10 000,

изображающему бога *Hh*, который, по египетским представлениям, находясь под землей, поддерживает небесную сферу и имя которого *Hh* означает «бесконечность»¹⁾. Как и в других случаях, этот разряд, 60 шестидесятков, бывший некогда последним, стал позже рассматриваться как счетная единица новой группы числительных: путем вписывания в этот знак знака 10 получили šār-u, т. е. 10 · 3600; путем вписывания «1» = 60 получали šār-gal, т. е. 60 · 3600. šār-gal означает «большой» šār; это наименование «большой» šār для 60 šār и в этом случае точно соответствует отношению «большой» единицы = 60 к обыкновенной единице = 1.

¹⁾ Аналогичный к этому является аккадское слово *limu* («1000», см. выше стр. 110) — «диск», «круг».

Если пока оставить в стороне основание 60, то окажется, что перед нами явления, которые нам уже хорошо известны из того, что мы говорили о системах счисления вообще: эта система, начиная от малой единицы, построена на десятичном основании с индивидуальными знаками для 1 и 10; затем идет большая единица (равная 60 малым единицам) и эта же единица, умноженная, как вторая ступень. Наконец, третья и последняя ступень — повторение большой единицы, имеющей первоначально значение чистой множественности, но затем становящейся снова исходным пунктом для новой последовательности единиц: 1, 10, 60.

Итак, мы можем уже здесь констатировать — а это именно существенно, — что и вавилонская система чисел имеет свою историю, представляющую собою полную параллель ко всем другим известным нам процессам, наблюдающимся в системах счисления, и что позднейшую систему позиционного обозначения чисел, применяемую в математических текстах, можно вывести из этой древнейшей системы, допустив, что на определенной стадии развития перестали тщательно отличать друг от друга большие и меньшие единицы; этот процесс получил такое распространение, что, с одной стороны, отказались от индивидуальных обозначений высших единиц, а, с другой, — вовлекли в возникшую таким путем стройную математическую систему и обозначения для дробей. Отсюда видно, что истинным исходным пунктом этого столь удивительно эластичного позиционного обозначения было свойство породившей это обозначение системы, которое мы назвали бы крайней примитивностью. Эта примитивность заключается в том, что в системе индивидуальных обозначений существовали только знаки для единиц и десятков и что следующий класс чисел снова начинался с единиц; только в тех случаях, когда эти единицы приходилось сопоставлять с другими единицами, их приходилось обозначать как большие единицы. В действительности же мы имеем здесь *изолированные группы*, каждая из которых, взятая сама по себе, еще ни в чем существенном не вышла за пределы первой стадии развития десятичной системы.

На ближайших страницах мы исследуем подробнее более глубокие причины этого процесса.

Нам остается еще кратко остановиться на соответствующих процессах при возникновении знаков для обозначения мер (рис. 34). Из более древних форм для этих знаков можно непосредственно видеть, что знак для 1 еще возник вследствие той же лигатуры, соединяющей единицу и десятку, что и в числовом знаке для 600. Единственная разница лишь в том, что единица получила вид лежащего клина, соответственно тому, что единицы мер поверхности gán (см. выше стр. 111) обозначались при помощи лежащего числового знака. Знак для bur в этой системе есть также не что иное, как обычный числовой знак, именно — знак для 10. Сюда надо добавить еще знак для 10 bur; в

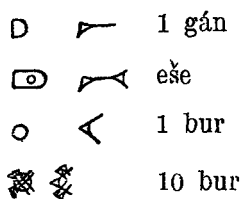


Рис. 34.

этом случае перекрещивающиеся клинья должны обозначать удешлечение ¹⁾.

Благодаря, главным образом, новейшим раскопкам, нам в настоящее время известны уже тексты, принадлежащие к первому периоду развития письма (иными словами, слои, лежащие еще глубже, уже никаких писем не содержали) ²⁾. Система чисел, которую мы только что охарактеризовали, — именно со знаками для 1 и 10, далее с большой единицей в роли знака для 60 и с большим кругообразным знаком для 3600 (рис. 35) — встречается вплоть до этих древнейших слоев (например в Уруке слои II—IV должны быть датированы приблизительно 3500 г.). Наряду с этими знаками здесь встречается лигатура для $10 \cdot 60 = 600$ и еще одна лигатура, второй элемент

Д	1	нам из знака для меры поверхности в 10 bur (см. выше рис. 34). Так как 1 bur пишется при помощи знака для 10, то знак для 10 bur должен, будучи употреблен как чисто числовой знак, иметь значение 100, так что наша лигатура должна иметь значение 100 · 60, т. е. 6000. В знаке  мы имеем таким образом explicite числовой знак для 100, т. е., кроме знака для 10, употреблявшегося во все периоды существования шестидесятеричной системы, мы имеем еще знак для ближайшей единицы десятичной системы — именно для 100.
О	10	
Д	60	
	$10 \cdot 60$	
	$100 \cdot 60$	
О	3600	

Рис. 35.

Этим не ограничиваются следы десятичной системы, идущей далее десятка. Тексты из Джемдет Наср (местность, расположенная приблизительно в 25 км к северо-востоку от Вавилона), восходящие также к четвертому тысячелетию, знакомят нас с системой счисления (рис. 36), применяющей, кроме известных уже нам знаков для 1 и 10, еще большой оттиск в виде круга, но для 100. Эта десятичная система не ограничивается местностью Джемдет Наср, лежащей далеко на север, но налицо и в Уруке (слои IV). Те слои в Уруке, которые соответствуют указанным паходкам в Джемдет Наср, именно слои III и II, содержат лишь тексты, применяющие исключительно шестидесятеричную систему, изображенную на рис. 35. Наконец, следует указать еще на то, что аккадское числительное *теи* — сто — также взято из сумерийского, где оно функционирует просто как обозначение множественного числа; это указывает также на то, что разряд 100 десятичной системы

¹⁾ Этот знак можно еще опознать на рис. 18 (стр. 68); в правом столбце он встречается несколько раз.

²⁾ Необходимо еще раз подчеркнуть, что здесь речь идет уже не о математических текстах, а, главным образом, о хозяйственных текстах, содержащих числовые знаки. Таких текстов до нас дошло чрезвычайно много; их можно точно датировать благодаря тому, что они имеют источником систематические раскопки, дающие как раз для древнейших эпох безукорыненную последовательность слоев. Для более поздних математических текстов возможность датировки значительно меньшая. Причина этого частью в том, что число их сравнительно невелико, частью в том, что они происходят из старых или хищнических раскопок (ср. сноску на стр. 64).

когда-то существовал, но на нем эта система заканчивалась. Поэтому, по всей вероятности, в большом знаке в форме круга надо видеть тот же символ, что и в знаке для 3600, о котором мы говорили выше (стр. 114), именно «круг», «все». Этот же знак для 3600 применялся еще, как мы видели, в ту эпоху, когда пиктографические изображения заменились уже клинописными знаками, получившими липейный вид; в эту эпоху оттиск в форме большого круга желают противопоставить просто оттиску, делаемому всей ¹⁾ палочкой; для этой цели первому придается форма окружности, тогда как второму знаку, выражающему числительное 10, придается вид угловатого крючка. Я считаю вероятным, что и в нашем случае мы имеем такое же противопоставление, именно: оттиск, делаемый всей палочкой, — для 10 и окружность — для понятия множественности 100. Я думаю даже, что именно это противопоставление и

○ 1
○ 10
○ 100

Рис. 36.

породило знак , который, как мы видели, также служил для обозначения 100 и в котором перекрещенные клинья должны были символизировать окружность.

Таким образом изученный нами материал дает нам право уже сейчас сформулировать следующий вывод. Малые натуральные числа писались при помощи индивидуальных знаков, причем в древнейшее время существовали знаки для дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ ²⁾ и знаки для единицы и десятка. На следующей стадии развитие идет по двум линиям. С одной стороны, мы встречаем столь архаическое положение вещей, когда ближайший десятичный разряд 10·10 еще рассматривается как множественность вообще; с другой стороны, уже в древнейшее время сюда присоединяется и кое-что из «шестидесятеричной» области: наряду с малыми единицами встречаются и большие единицы со значением 60; позже сюда присоединяется еще повторение этого процесса, именно символ 60·60, замыкающий ряд и служащий для обозначения множественности вообще.

Таким образом постепенно выделяются следующие явления:

1. Несмотря на то, что вавилонская система счисления была первоначально построена на десятичном принципе, уже очень рано появляется разряд 60, который, как мы знаем, позднее стал «основанием» для системы последовательных шестидесятеричных обозначений.

2. Большие единицы разряда 60 уже с самого начала лишь незначительно отличались от малых единиц и таким образом уже содержали в себе зародыш позднейшего позиционного способа письма. Это — чрезвычайно существенный пункт, на который необходимо обратить осо-

¹⁾ Круглой. *Переводчик.*

²⁾ В нашей схеме на рис. 31, стр. 105, изображен и знак для $\frac{5}{6}$, но он не встречается в древнейших текстах. Я полагаю, что он введен лишь позже и носит вторичный характер: причиной его введения, по видимому, являются метрологические соображения. К этому предположению приводит и то обстоятельство, что соответственная основная дробь $\frac{1}{6}$ не изображается особым знаком.

большое внимание. Именно в этом обстоятельстве лежит объяснение того, что вавилонская система, идя по совершенно своеобразному пути, отступила от обычных в других местах (например в Египте) индивидуальных обозначений с совершенно различными символами для отдельных разрядов.

3. Наконец, нам пришлось уже иметь дело с чрезвычайно любопытным явлением: числовые знаки, будучи употреблены для обозначения мер, получают совершенно новые значения, не совпадающие с их значением в других случаях.

Эти три группы явлений нам необходимо рассматривать вместе. В самом деле, ясно, что каждое из них есть характерная, резко выраженная особенность вавилонских числовых обозначений; поэтому уже а priori совершенно невероятно, чтобы каждое из них возникло случайно и независимо от других. И в самом деле, мы убедимся, что эти явления органически связаны друг с другом. Для этого нам необходимо ознакомиться со структурой вавилонских названий мер, хотя бы в самых грубых очертаниях. Поскольку мы вовлекли в область нашего исследования и третий из поставленных выше вопросов, ясно, что мы не можем уклониться от этой задачи.

б) Системы мер.

Цель следующих строк — выяснить на нескольких характерных примерах сущность тех явлений, с которыми нам приходится иметь дело при изучении клинописных систем мер. При этом главное внимание мы направим не на вопрос об абсолютной величине отдельных мер (это — чисто археологическая проблема, нас здесь не касающаяся), а только на отношения величин отдельных мер друг к другу. Выгода такого подхода состоит не только в том, что мы облегчаем себе ознакомление с предметом, упрощая нашу задачу: этот подход важен и с принципиальной точки зрения. В самом деле, абсолютные нормировки мер и весов, разумеется, не могут отличаться большой точностью; вдобавок, они должны несколько меняться с течением времени. Что же касается отношений между отдельными мерами, то эти отношения в значительно большей мере независимы от таких перемен, по большей части случайных и не имеющих значения для разбираемых нами вопросов.

При изучении прилагаемой схемы мы начнем с мер длины. Двумя важнейшими единицами мер, встречающимися постоянно также и в математических текстах, являются GAR и локоть (последний равен приблизительно 50 см)¹⁾. Длина в 60 GAR обозначается как *uṣ* или *giš*; *giš* означает 60, а *uṣ* — термин, обозначающий просто «длина». Это представление аналогично тому, которое легло в основу египетского обозначения числа 100, исходящего из того, что такова длина измерительной рулетки. Вообще конкретные обозначения для мер и для чисел всегда органически переплетены между собой и на первоначальных стадиях их невозможно отделить друг от друга.

¹⁾ Кстати, в математических текстах GAR — это та мера, которую при числовых заданиях величин надо всегда подразумевать, если нет других специальных указаний. Напротив, если подразумеваются локти, то это всегда указывается.

Если приглядеться внимательней к таблице мер длины, то сразу можно выделить три различные группы. Прежде всего идут натуральные меры, связанные с локтем: ширина пальца, лядь и локоть; в Египте этим мерам соответствует: ширина пальца, ширина ладони (4 ширины пальца) и локоть. Относительная величина отдельных размеров этой группы в общем определяется величиной руки и ладони. Однако, сопоставив вавилонские и египетские подразделения локтя, мы убедимся, что в Вавилонии естественные размеры в гораздо большей степени подогнаны под простые соотношения между числами, чем в Египте; ориентация на шестидесятеричную систему вполне очевидна.

Длины

50	1/180		
палец	1/30		
пять	1/2		
локоть	1		
BAR	12	1	
у3-гу3		80	у3-Длина гу3-60
Милля		30,0	

Поверхности

še	1/80		
šekel	1/60		
SAR	1		(4 SAR) ¹
iku	100	1	(10 SAR) ²
eše	600	6	→
bur		18	<
bur-u		180	⊗

Беса

Џе	1/180	
Џека	1	1/60
МИНО		1
МАЛАНТИ		60

	Роб. Единица	
палец	1/2"	1/2"
рука		1/7
ноздь	1/2	
подошма	1	1

GAR	1
10 GAR	10
uš-giš	60

3.4.11.11	?
-----------	---

še	1/100	
šekel	1/50	
SAR	1	
iku	100	1
eše	500	6

18	bur
780	bur-u

Сред	1/60
мина	1
талант	60

57	1/60				1/60	Sekel
SAR	1				1	ΣAP
60 SAR	60	1			60	ΣAP-15
eše	600	10	1			bur
				1	10	600
				10	100	
						bur-u

Другая группа мер, имеющая уже определенно шестидесятеричную структуру, примыкает к GAR: $1 \rightarrow 10 \rightarrow 60$. Наконец, «миля» и «час ходьбы» — меры для больших расстояний. Из отношений локтя к GAR и GAR к миле (они даны в нашей таблице) вытекает, что миля равна 648 000 пальцев. Но с исторической точки зрения установление этого факта лишено всякого значения. Отдельные группы мер, подобные тем, которые мы выделили, говоря о мерах длины, возникают, очевидно, независимо друг от друга; приведение всех их в постоянную, выражаемую точными числами зависимость было явлением вторичным.

Это — очень важный пункт в нашей аргументации; и в этом случае необходимо прежде всего освободиться от наших обычных представлений. Мы привыкли класть в основу наших мер единую последовательную систему чисел, и поэтому, например, когда речь идет о мерах длины, нам совершенно все равно, выражать ли величины в километрах

или в метрах, или в виде суммы различных степеней десяти сантиметров. Когда же мы изучаем историю чисел, вопрос стоит совершенно по-иному. В этом случае в нашем распоряжении не имеется готовой обширной последовательной системы чисел; существуют только такие числовые понятия, которые имеют постоянное применение в практической жизни, следовательно, первоначально налицо только сравнительно узкая область числовых понятий. Совершенно аналогичное явление имеем мы и в случае мер: и здесь человек не начинает с создания единой стройной системы, и меры также получают дальнейшее развитие в зависимости от нужд практического применения. Первоначально человек нуждается только в том, чтобы выразить в тех или иных мерах небольшие отрезки порядка от ширины пальца до длины локтя; затем встречается необходимость в больших мерах вроде единицы, называемой GAR (приблизительно 6 м), и лишь наконец — в мерах для действительно больших расстояний. Лишь постепенно возникает необходимость установить прочную взаимную зависимость таких и з о л о т о в а н н ы х групп мер; первоначальная неопределенность и делает как раз возможным фиксировать эту зависимость таким образом, чтобы она получила сколько-нибудь удобный для практического счета вид, как в этом можно убедиться из нашей таблицы.

Особенно важная группа мер дана на нашей схеме справа, именно — таблица весов. Веса получают особое значение потому, что в весе (именно в весе серебра) выражаются деньги. Единицы веса: шекель, мина и талант, образуют точно шестидесятеричную последовательность.

Существует еще и дробная часть шекеля, именно $\frac{1}{180}$ шекеля. То же наименование $\frac{1}{180}$ шекеля приведено в нашей схеме и в таблице мер длины: $\frac{1}{180}$ локтя. Этот способ обозначения несколько удивителен в применении к мерам длины: $\frac{1}{180}$ означает по-сумерийски «зерновой хлеб». Здесь мы встречаемся с наименованием меры, взятым из другой области и ставшим просто обозначением для известного числового отношения к другой мере (в данном случае $\frac{1}{180}$); подобным же образом слово *mina*, обозначавшее первоначально, как мы видели в § 3 (стр. 107), деньги определенного веса, равного $\frac{1}{12}$ асса, стало впоследствии служить для обозначения $\frac{1}{12}$ вообще. Так и здесь $\frac{1}{180}$ стало обозначать $\frac{1}{180}$ вообще.

Нетрудно понять, откуда первоначально получилась эта мера. Вавилонские меры поверхности не были первоначально производными от мер длины, как, скажем, наш квадратный метр, — это были меры посеваемой площади. Меры же, служащие для обозначения величины поля, могут быть выражены через количество зерна, потребного для того, чтобы засеять ту или иную площадь. $\frac{1}{180}$ — «зерновой хлеб» — есть таким образом просто мера посева; поэтому она и стоит первой в таблице мер поверхности.

Мы не будем здесь очень подробно останавливаться на этих вопросах, но сразу же перейдем к сравнительному изучению мер, приведенных в средней части нашей схемы на стр. 117. О самой малой мере *е* мы только что говорили. Три *е* называются шекелем; здесь мы, очевидно, имеем дело с простым перенесением названия для $\frac{1}{60}$ из мер веса. Важными мерами являются SAR ¹⁾ и *i*ku, относящиеся друг к другу как 1 : 100. SAR — это площадь, равная квадратному GAR'у. Большие меры *е*, *bur* и *bur*-и обозначаются числовыми знаками, о которых мы говорили уже на стр. 113. Отношение этих разрядов, например, к *i*ku весьма необычное, именно: 6, 18 и 180. На ту лоболытную особенность, что *bur* записывается с помощью знака для 10, мы указывали уже выше.

Теперь мы постараемся использовать доводы, убедившие нас в том, что меры первоначально не представляли собой единства и не были приспособлены для ведения непрерывного счета, начиная от самой меньшей меры и кончая самой большей, но некогда образовывали самостоятельные группы величин различных порядков. Мы сразу же получим то разделение, которое дано в средней части нашей схемы. Остановимся несколько подробнее на группе, заключающей *bur*. Само собой напрашивается предположение, что применение числового знака 10 для *bur* первоначально было вполне рациональным; тогда мы сможем реконструировать меру, которую я для краткости буду обозначать символом 1β ; десять таких мер равны *bur*. В таком случае сразу получает смысл и числовой знак для *bur*-и, а именно 100. Мы уже встретили его в этом значении (ср. выше, стр. 114). Таким образом меры 1β и *bur*-и чисто десятичные.

Кроме знака *bur* существует еще другой числовой знак для мер поверхности, содержащий числовой знак для 10, именно знак для *е* (см. стр. 113). В самом деле, 1 *е* также представляет собой взятые десять раз 60 SAR, так что в группе, начинающейся с SAR и кончающейся *е*, мы встречаем обычную шестидесятеричную структуру: 60 SAR является здесь началом новой десятичной группы, совершенно так же, как мы это видели на структуре шестидесятеричной системы цифр.

Отождествим на минуту обе меры: *е* и *bur*, выражающиеся числовым знаком 10; отождествим только в принципе, так как фактическое отношение этих мер есть 1 : 3. Подобно тому, как с *е* мы координировали его десятую часть, 60 SAR, так и меру 1β мы будем рассматривать как некую гипотетическую меру ΣAP , взятую 60 раз. $\frac{1}{60}$ такого

ΣAP мы назовем шекелем. Соответственно $\frac{1}{60}$ SAR мы назовем *1 ш*. Таким путем мы получим две таблицы, паходящиеся внизу на нашей схеме на стр. 117; мы должны иметь в виду, что сравнительный масштаб для обеих таблиц должен быть исправлен соответственно отношению *е* к *bur*, т. е. 1 : 3. Каждая из получившихся таким путем групп вполне конгруэнтна с другой; если взять любую из них отдельно, то она не содержит ничего такого, что не было бы в полном согласии со спо-

¹⁾ По-аккадски эта идеограмма читалась как *musarū* (т. е. «гряд»).

собою обозначения, обычным в системах мер, о которых мы только что говорили здесь. Сделаем теперь предположение, что обе эти группы первоначально охватывали меры одинакового типа, т. е. меры в принципе одного и того же значения и с одинаковым отношением друг к другу соответственных разрядов; абсолютные же значения этих мер могли быть различными в зависимости от той местности, в которой они применялись. Подобные явления засвидетельствованы в метрологии всех времен и народов. Меры, имеющие принципиально одну и ту же структуру, могут быть в силу внешних причин различные величины, если их рассматривать одновременно: достаточно вспомнить о различных талерах в старой немецкой монетной системе. Когда две такие системы сливаются в одну, — а это может произойти, скажем, в том случае, когда происходит политическое объединение различных областей. — получается нечто подобное тому, с чем мы имели дело в начале нашего рассуждения. Отдельные меры сохраняют свои обозначения и наименования, но получают такие удивительные отношения между разрядами, как $1 : 18$, если только не прибегают к изменению абсолютных значений. Достаточно перемешать друг с другом обе таблицы, изображенные в самом низу схемы, и отождествить ΣAP и SAR , чтобы получить в качестве малых единиц, с одной стороны, $\frac{1}{60}$ (шекель), с другой —

$\frac{1}{180}$ (še). Соответственным образом $10\beta = 1$ bur окажется равным $3\epsilon\epsilon$ и получит значение 18 по сравнению с десятичной единицей $1 iku = 100 SAR$, принадлежащей к левой группе.

Применяя такую аргументацию, мы преследуем двоякую цель: во-первых, мы получаем естественное объяснение случаев применения числовых знаков для значений, совершенно не совпадающих с теми, которые они имеют обычно. Вместе с тем, учтя это изменение значения и восстановив первоначальное положение вещей, мы приходим к взаимному расположению величин, находящемуся в полной гармонии с другими группами мер, именно к расположению, свойственному известной уже нам характерной системе с чередующимися десятичными и шестидесятичными разрядами, причем частью десятикратные, частью шестидесятикратные величины единицы становятся сами по себе основными счетными единицами для особых малых групп мер. Иными словами, важнейшие системы мер имеют как раз ту же структуру, что и так называемая шестидесятичная система цифр, или, еще иначе, первоначально между системой мер и системой чисел нет вообще никакой принципиальной разницы. Мы видим, таким образом, что система чисел может рассматриваться просто как оный субстрат расположения величин в важнейших системах мер.

в) История возникновения шестидесятичной позиционной системы.

Теперь мы попытаемся набросать общую картину всех тех процессов, которых мы коснулись как в предшествующих разделах этой главы, так и в предшествующей главе при изучении структуры систем счисления вообще. Таким путем мы получим единую цельную картину

истории возникновения такой своеобразной и не имеющей параллелей в истории системы, как шестидесятеричная.

Выше мы выделили три группы вопросов, очевидно, теснейшим образом связанных друг с другом, — вопросов, которые мы должны изучать параллельно друг другу, если хотим понять, что же собственно представляет собою «шестидесятеричная система»: 1) вопрос о возникновении основания 60, 2) вопрос о происхождении позиционного обозначения и, наконец, 3) объяснение того факта, что числовые знаки при мерах имеют значение, отличающееся от обычного.

Если мы желаем сделать попытку объяснить эти явления, то нам необходимо рассматривать перечисленные вопросы в несколько ином порядке. Самым поразительным в этой системе является основание 60; однако здесь перед нами, очевидно, вторичное явление, так как числа до 60 пишутся совершенно так же, как обычные индивидуальные знаки десятичной структуры. Шестидесятеричный принцип проявляется в математических текстах не в самих числовых знаках, а исключительно в способе позиционного обозначения. После 10 отсутствует следующий новый символ — индивидуальный знак для 60. — такой знак был бы точной параллелью к египетскому знаку для 100. Напротив, разряд 60 получает это значение благодаря тому, что одному и тому же числовому знаку необходимо придать значение в шестьдесят раз большее, чем обычное, если он отодвинут на одно место вперед. Именно это увеличение значения в шестьдесят раз и есть тот поразительный факт, который нуждается в объяснении. Но собственно центральной проблемой является факт многозначности обычных числовых знаков в зависимости от способа их применения, т. е. позиционная система как таковая. Именно на это обстоятельство мы прежде всего обратим свое внимание.

Для третьей из формулированных здесь проблем мы нашли удовлетворительное объяснение уже в предыдущем разделе. Если числовые знаки имеют при известных мерах поверхности значение, отступающее от обычного, то, как мы показали, это легко можно объяснить, сделав допущение, что две группы аналогично построенных «ядер», т. е. небольших систем мер, путем наложения друг на друга механически соединены в одну; таким образом то значение, которое получили эти знаки, имеет вторичный характер. Но мы уже выше показали, что, поскольку речь идет об обыкновенных числовых знаках, и эта многозначность имеет вторичный характер и что первоначально большая единица со значением 60 еще отличалась своим написанием от малой единицы; далее, мы видели, чторяду с этой системой существовали и чисто десятичные системы, правда, в столь ограниченной области, что уже взятое десять раз 10 носило характер множества вообще. Система чисел имела, таким образом, на первых порах обычную десятичную структуру, основанную на простом сложении значений написанных рядом знаков, как и в Египте. Точно так же и первое проявление шестидесятеричного принципа еще не носит чисто позиционного характера, отдельные разряды еще легко различимы между собой. Как мне кажется, это дает непосредственно ключ к решению всего круга разбираемых нами проблем: в момент возникновения позицион-

ного обозначения имелись лишь последовательные первоначально самостоятельные группы мер, каждая из которых была, разумеется, построена по десятичному принципу.

Те явления, о которых мы говорили в общем виде при изучении систем счисления, повторяются и здесь. О существовании на первоначальных стадиях развития, где бы то ни было, отвлеченного понятия числа не может быть и речи. Все понятия числа суть первоначально понятия индивидуального числа, примыкающие к конкретным обозначениям количеств. Лишь постепенно такие обозначения количеств становятся обобщенными обозначениями чисел вообще. Равным образом первоначальное «ядро», т. е. небольшая группа малых индивидуальных чисел, лишь постепенно вырастает в действительно однородную последовательность чисел: с с и с т е м а чисел есть всегда окончательный результат длительных исторических процессов. С совершенно аналогичным положением вещей мы имеем дело и в данном случае. Мы имеем небольшие группы индивидуальных числовых знаков, первоначально примыкающие к системам мер: числовые знаки от 1 до 10 и индивидуальные обозначения для «натуральных дробей»: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и ее дополнительной дроби $\frac{2}{3}$. Как мы видели на старинных формах знаков, эти обозна-

чения дробей имели первоначально метрологический характер. Эти простые «ядра» индивидуальных обозначений можно найти во всех имеющих какое-либо значение группах мер; на первых порах их достаточно для всех потребностей практического применения. Такого рода «ядра» постепенно разрастаются в «систему» не путем каких-либо теоретических спекуляций — и в этом случае причина лежит в потребностях практического применения. Нужды хозяйственной жизни, прежде всего следовательно, денежная система, бывшая здесь, как и повсюду, системой мер веса, — поневоле постепенно расширяет и область соответствующих числовых обозначений. Необходимо и в этом случае иметь в виду механическое соединение вместе таких первоначально самостоятельных групп путем наложения друг на друга. При этом мыслимы две принципиально различные возможности. Одна — «несистематическая», которую мы изучали в связи с мерами поверхностей: две группы мер, каждая из которых построена совершенно аналогично другой, хотя и имеет пескостопные абсолютные значения, приведены во взаимную зависимость тем путем, что один из мер той и другой системы выкивают, другие выходят из употребления; числовые же знаки и после, как и до этого процесса, остаются связанными с соответствующими величинами, поскольку они сохраняются в употреблении. Другую возможность развития при приведении во взаимную зависимость различных мер мы можем охарактеризовать как (случайное!) возникновение «системы». Эта возможность может иметь место в том случае, когда интервал между первоначально изолированными «ядрами» достаточно велик для того, чтобы известная изоляция обеих групп продолжала существовать и после их соединения. Так, например, возьмем две группы мер весов так, чтобы единицы одной группы оказались сравнительно велики по сравнению с единицами другой. Тогда рядом будут стоять

первоначально изолированные друг от друга два «ядра» такой структуры:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} 1 \dots 10, \quad \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} 1 \dots 10.$$

Если мы желаем эти группы мер более или менее практичным способом связать друг с другом так, чтобы получились однообразные взаимоотношения, то будет естественно сделать это так, чтобы дробные части группы больших мер были бы целочисленными и кратными единицы группы меньших мер. Для этой цели между основными единицами обеих групп должно быть установлено такое отношение, чтобы оно допускало деление на 2 и на 3, т. е. отношение разрядов должно содержать множитель 6. Если структура сама по себе десятична (а такую структуру уже имеют целые числа к самому началу интересующих нас процессов), то естественно, что отношение единиц устанавливается таким образом, чтобы большая единица получалась из малого десятичного «ядра» путем умножения не на десять, а на шесть. Все это возможно, как мы уже говорили, при том предположении, что между обеими группами уже до начала процесса существует интервал, приблизительно соответствующий такой процедуре. Так, соединение «ядра» локтя с «ядром» GAR — типичный случай соединения, не образующего систему. Напротив, соединение ширины пальца с локтем и «длины» с милей содержит уже больше возможностей для образования системы, благодаря наличию отношения 1 : 30. В области системы мер мы встречаемся, таким образом, на каждом шагу с таким «скреплением» первоначально изолированных групп. Мне кажется, что я не допущу никакого неоправданного нововведения, выставив гипотезу, что такое «скрепление» возникло вследствие естественного требования, чтобы дробные части большей меры выражались через десятикратные единицы из группы меньших мер, — это должно было привести к соединению на основе отношения 1 : 60. Мне кажется даже, что можно указать точно на тот пункт, где это произошло: в служившей в качестве «денег» системе мер весов шекель — мина.

Если согласиться с этим, то общую картину можно будет реконструировать в следующих чертах. Первоначально существовала десятичная система чисел, охватывавшая, однако, сравнительно очень небольшую область: индивидуальные обозначения до 10, и уже 100 — множество вообще. Из дробей существовали только натуральные дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Уже на этой сравнительно ранней стадии начинается известная систематизация важнейших мер. Соединение группы меньших мер с группой больших мер приводит, соответственно описанной только что структуре числовых понятий, к отношению 1 : 60 между разрядами шекель и мина. Как можно доказать соответствующими текстами, это обозначение было первоначально абсолютным: малые и большие единицы различались друг от друга либо тем путем, что к ним просто присоединялись соответствующие обозначения, либо по крайней мере различной величиной числовых знаков. С этого момента вступают в силу обычные процессы сглаживания. Прежде всего пере-

стают приписывать или символически обозначать подразумеваемую единицу, так как на практике не возникает сомнений, какая именно единица имеется в виду. С другой стороны, первоначально конкретные обозначения дробных частей мер становятся обозначениями для дробей вообще и переносятся на другие группы. Таким путем и шестидесятиричная структура системы мер веса переносится и на другие области. Наконец, вследствие роста хозяйственной жизни именно денежная система приводит и к расширению аппарата счета, как такового. Шестидесятиричная структура, первоначально ограничивавшаяся только двумя группами мер, теперь путем рассуждения распространяется на новые области, а счет с дробями и кратными числами получает новое развитие по аналогии со счетом денег, подобно тому, как и римский счет с дробями развился также из денежной системы. Возникновение такой системы из первоначально конкретной системы веса непосредственно связано с позиционным обозначением. Это позиционное обозначение есть не что иное, как систематический отказ от обозначения единиц меры при письме. Если бы это позиционное обозначение возникло в результате сознательных математических рассуждений, то нельзя было бы представить себе, почему люди не ввели знака нуля для обозначения мест, остающихся пустыми. Таким образом самый факт отсутствия каких бы то ни было знаков для обозначения таких пробелов, как раз в древнейших текстах, является лучшим доказательством того, что первоначально, несмотря на то, что числовые знаки были формально одни и те же, при каждом отдельном разряде подразумевалось конкретное обозначение соответствующей меры. Лишь позже, когда эта система была сознательно преобразована в математическую систему, в эту уже прочно утвердившуюся позиционную шестидесятиричную систему было включено еще минимально необходимое дополнение — знак отделения на местах пропущенных разрядов. Эту стадию развития мы находим исключительно в чисто математических текстах, тогда как в системе чисел, применяемой в практической жизни, мы наблюдаем возврат к той своеобразной смешанной десятичной системе, которую мы заметили в начале этого параграфа (стр. 110 и сл.).

Таким образом позиционная шестидесятиричная система математических текстов оказалась вполне естественным конечным результатом долгого развития, ничем принципиально не отличающегося от аналогичных процессов в других культурах. Так, например, в египетском письме при обозначении числовыми знаками мер сыпучих тел можно наблюдать ту же тенденцию к позиционному написанию, выражающуюся на первоначальной стадии в применении числовых знаков большей и меньшей величины, которую мы наблюдали выше. Особенности развития числовых знаков в Вавилоне был в сущности только тот оборот, который случайно припали эти процессы, именно то обстоятельство, что пормирровка денежно-весовой системы здесь падает на столь раннюю стадию развития, когда, с одной стороны, существовавшая и в Вавилоне первобытно-десятичная структура еще лишь незначительно перешла за сто, а, с другой, — натуральные дроби еще ограничивались маленькой группой $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, причем еще не выработались про-

цедуры, вроде процедуры последовательного деления пополам или на три части, применявшейся в Египте. Само собой разумеется, что необходимо учесть еще большое значение прекрасно организованной хозяйственной культуры, известной нам очень хорошо как раз для древнейшего времени из огромного числа хозяйственных текстов. Эта первая, так сказать, примитивная стадия развития характеризуется выработкой системы действий с дробями и умножения, взятой из денежного дела и имевшей решающее значение. На второй стадии, начинающейся примерно с древнейшей аккадской династии, наблюдается уже разделение, решающее дальнейшую судьбу этого процесса: шестидесятеричную систему стараются сознательно использовать в математических текстах, в чем мы могли с полной ясностью убедиться из истории развития математических таблиц, тогда как дальнейшее развитие систем мер, которое нас здесь, поскольку речь идет о частностях, больше не интересует, идет по своему пути.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ III.

а) К главе III в целом.

(III, 1) *S e t h e K.*, Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern, und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist, Schriften der Wissenschaftlichen Gesellschaft Strassburg, № 25, 1916.—Эта работа является по существу основой для всего круга разобранных здесь вопросов.

(III, 2) *F e t t w e i s E.*, Das Rechnen der Naturvölker, Leipzig 1927.

(III, 3) *L é v y - B r u h l L.*, Das Denken der Naturvölker, 2-е изд., Wien. Braumüller 1926.—Эта работа трактует вопрос об истинных основах разбираемых явлений значительно глубже, чем работа III, 2. Это и другие произведения Левн-Брюля стали исходным пунктом для работ целой школы.

По относящимся сюда вопросам существует чрезвычайно обширная литература в различных антропологических, этнографических, а также лингвистических трудах. Относящиеся сюда литературные указания можно найти, например, у *S c h r a d e r*, Reallexikon der indogermanischen Altertumskunde, под словом «Zahlen». Дальнейшую ориентировку по незатронутым здесь системам счисления дают:

(III, 4) *L ö f f l e r E.*, Ziffern und Ziffernsysteme, 2 тома, Math.-Phys. Bibl., Leipzig, Teubner, 1928 и 1919.

(III, 5) *M e n n i n g e r K.*, Zahlwort und Ziffer, Breslau, Hirt, 1934.

б) К § 4.

(III, 6) *N e u g e b a u e r O.*, Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, N. F., т. 13, 1927, стр. 1.

(III, 7) *T h u r e a u - D a n g i n F.*, Esquisse d'une histoire du système sexagésimal, Paris, Geuthner, 1932. Там же можно найти дальнейшие ссылки на литературу.

ЕГИПЕТСКАЯ МАТЕМАТИКА.

§ 1. ТИП ЕГИПЕТСКОЙ МАТЕМАТИКИ.

а) Источники.

Наше знакомство с египетской математикой основано главным образом на двух сравнительно больших текстах — на папирусе, находящемся в настоящее время в Москве (сокращенное обозначение: М), и на папирусе Британского музея, который по своему первоначальному хозяину носит название математического папируса Райнда (Rhind; сокращенное обозначение: R). Сюда надо присоединить еще несколько маленьких отрывков, находящихся в Берлине, Лондоне и Каире. R значительно превосходит своей величиной все остальные тексты. Он содержит около 80 примеров, не считая вычислений, относящихся к действиям над дробями ¹⁾. Это — большой папирус, имеющий приблизительно $5\frac{1}{2}$ м в длину и 32 см в высоту. Папирус М имеет почти такую же длину, но в высоту он имеет только 8 см. В нем содержится несколько больше 25 примеров. Оба текста сохранились сравнительно хорошо, в М недостает начала. Все эти тексты в основе своей принадлежат Среднему царству ²⁾ и, разумеется, написаны иероглифическим шрифтом. Однако этой датировке нельзя придавать слишком большого значения, так как все тексты такого рода постоянно снова и снова переписывались, причем у нас нет никакого способа обнаружить их предшествующую историю. Поэтому имеющиеся пока в нашем распоряжении источники не дают нам никакой прочной основы для того, чтобы высказать предположение о времени и обстоятельствах первоначального появления математических текстов. Мне кажется, однако, что если принять во внимание весь тип египетской математики, о котором мы сейчас будем говорить, то вопрос о времени возникновения подобных текстов получит лишь второстепенное значение.

б) Общая характеристика математических текстов.

Наш обзор египетской математики мы начнем с того, что дадим наглядную таблицу задач, каждая из которых имеет целью найти неизвестное x из какой-либо линейной зависимости (см. таблицу на стр. 128) ³⁾.

¹⁾ Так называемые «таблицы величин $\frac{2}{n}$ » (см. ниже, стр. 132 и сл.).

²⁾ R, правда, написан в эпоху гиксосов, но в нем содержится указание, что он списан с текста, относящегося к Среднему царству.

³⁾ Чтобы в наших транскрипциях как можно ближе подойти к египетскому способу обозначения дробей, я пишу здесь и в дальнейшем всегда $\overline{n}$ вместо $\frac{1}{n}$ и $\overline{3}$ вместо $\frac{2}{3}$.

Эти вычисления посят в литературе столь же красивое, сколь неточное название — «вычисления хау». Это название возникло на заре египтологии, когда еще делались попытки вокализировать египетские слова; при этом *terminus technicus* 'h', встречающийся при этих вычислениях и означающий «куча, множество», — термин, которым обозначается искомая величина, читался ошибочно как множественное число; окончание множественного числа вокализировали с помощью гласной *u* ¹⁾.

Транскрипция задач подлинника при помощи формул, разумеется, даст только очень условную картину истинного положения вещей. Так, например, дословно в примере R 30 читается следующее: «Если писец говорит тебе 10 есть $\overline{3}$ и $\overline{10}$ от чего? то пусть оп тебя услышит...». Далее следует самое выполнение деления $10 : (\overline{3} + \overline{10})$; как это выполнялось, мы сейчас скажем. Результат выражается затем словами: «величина ('h'), которую ты ему говоришь, есть $13 + 2\overline{3}$ ». Так же отредактированы и все другие задачи, транскрибированные в нашей таблице при помощи формул. Как уже было сказано, передавая неизвестное символом *x*, мы не даем истинной картины египетской процедуры. Это видно из того, как ведется вычисление в последнем из приведенных в таблице примеров, взятом из отрывка, хранящегося в Берлине. Это — самый сложный пример во всей группе: на первый взгляд кажется даже, что он сводится к квадратному уравнению, — в действительности x^2 задано линейно. Как показывает непосредственное вычисление, в результате должно было бы получиться $x = 8$, но текст не довольствуется этим, а определяет еще, кроме того, величину, содержащуюся во втором слагаемом: $(\overline{2} + \overline{4})x$, которая нас бы вовсе уже не интересовала. Это показывает, что в сущности ищут не величину *x*, а те слагаемые, из которых составлено первоначально заданное число. Это видно особенно ясно из примера R 39 и других подобных ему. Здесь требуется разделить определенным образом 100 хлебов между 10 людьми. Результат дан в следующем виде:

$$\begin{array}{rcl}
 12 \frac{1}{2} & & 8 \frac{1}{3} \\
 12 \frac{1}{2} & & 8 \frac{1}{3} \\
 12 \frac{1}{2} & & 8 \frac{1}{3} \\
 12 \frac{1}{2} & & 8 \frac{1}{3} \\
 & & 8 \frac{1}{3} \\
 & & 8 \frac{1}{3}
 \end{array}$$

¹⁾ Как в действительности надо вокализировать это слово, невозможно сказать. Обычно оба «ани» читают просто, как *a*; это — условное чтение, вовсе не имеющее целью познакомить читающего с действительно существовавшими в этом египетском слове гласными.

R 30		M 19	
$10 = (\bar{3} + \bar{10})x$		$(1 + \bar{2})x + 4 = 10$	
$x = 10 : (\bar{3} + \bar{10})$		$10 - 4 = 6 \quad x = 6 \cdot \bar{3}$	

M 25	R 32	R 26	R 27	R 24
$2x + x = 9$	$x + \bar{2}x = 16$	$x + \bar{4}x = 15$	$x + \bar{5}x = 21$	$x + \bar{7}x = 19$
$2 + 1 = 3$	$x = (16 : 3) \cdot 2$	$x = (15 : 5) \cdot 4$	$x = (21 : 6) \cdot 5$	$x = (19 : 8) \cdot 7$
$x = 9 : 3$				

R 34	R 25	R 33	R 31	R 29
$x + \bar{2}x + \bar{4}x = 10$	$x + \bar{3}x + \bar{4}x = 2$	$x + \bar{3}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 37$	$x + \bar{3}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 33$	$[(x + \bar{3}x) + \bar{3}(x + \bar{3}x)] = 10$
$x = 10 : (1 + \bar{2} + \bar{4})$	$x = 2 : (1 + \bar{3} + \bar{4})$	$x = 37 : (1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7})$	$x = 33 : (1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7})$	

K 3	R 28
$x - (\bar{2} + \bar{4})x = 5$	$(x + \bar{3}x) - \bar{3}(x + \bar{3}x) = 10$
$1 - (\bar{2} + \bar{4}) = \bar{4}$	$10 : 10 = 1 \quad x = 10 - 1$
$x = 5 \cdot 4$	

B 1
$x^3 + (\bar{2} + \bar{4})x^2 = 100$ $1^3 + (\bar{2} + \bar{4})^2 = 1 + \bar{2} + \bar{16}$ $\sqrt{1 + \bar{2} + \bar{16}} = 1 + \bar{4}, \sqrt{100} = 10$ $x_1 = 10 : (1 + \bar{4}) = 8$ $x_2 = (\bar{2} + \bar{4}) \cdot 8$

Таким образом получающиеся в результате отдельные порции записаны каждая отдельно, точь в точь так, как если бы речь шла о фактическом разделении всего хлеба между 10 людьми. При более внимательном исследовании оказывается, что вообще наиболее простое допущение — именно, что задача сводится к решению определенных линейных уравнений, — нисколько не соответствует истинному историческому положению вещей. Трудность заключается здесь совсем не в «решении» тех или иных уравнений, а в переводе вполне конкретных задач, имеющих определенный практический смысл, на язык числовой процедуры, — одним словом, в том, что я назвал бы «алгоритмизацией» данных задач. В этом отношении характерен пример R 37, в котором читаем следующее: «Я три раза хожу в свой четверик (за мукой), $\bar{3}$ своего я прибавляю к своему и $\bar{3}$ от $\bar{3}$ своего я прибавляю к своему и $\bar{9}$ своего я прибавляю к своему». Мы могли бы это транскрибировать в виде

$$3x + \bar{3}x + \bar{3} \cdot \bar{3}x + \bar{9}x = 1;$$

в тексте алгоритмизирование этих данных происходит следующим образом:

	1	1
	2	2
	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ от его	$\bar{3}$	$\bar{9}$
его	$\bar{9}$	$\bar{9}$
вместе		$3 + \bar{2} + \bar{18}$

Здесь данные текста умышленно повторены в левом столбце, а в правом столбце они выражены в числах по определенной счетной схеме; так, в частности, $\bar{3}$ от его $\bar{3}$ записано как $\bar{9}$, а затем совокупность $\bar{3} + \bar{9} + \bar{9}$ по египетским правилам действий над дробями выражена в виде $\bar{3} + (\bar{6} + \bar{18}) = \bar{2} + \bar{18}$.

Мы не будем здесь останавливаться подробно на вопросе, откуда взяты эти правила счета. Здесь нам важно только показать, что основной трудностью египетской математики являлось еще только овладение чисто цифровыми процедурами и что, когда мы облачаем эту задачу в алгебраические знаки, мы проходим мимо центрального вопроса с его главными трудностями.

Нам остается еще набросать в общих чертах внешнюю картину египетской вычислительной техники. Три примера, которые мы сейчас дадим, имеют целью показать, какие способы умножения тогда применялись. При этом в первом примере мы имеем настоящий основной метод египетского счета, тогда как два других примера представляют собой лишь случайное сокращение этого метода на основе десятичной системы цифр.

	(12 · 12)	1	12		
		2	24		
		/ 4	48		
		/ 8	96		
		вместе	144		
(14 · 80)	1	80	(16 ²)	/ 1	16
	/ 10	800		/ 10	160
	2	160		/ 5	80
	/ 4	320	вместе		256
	вместе	1120			

Первый пример показывает самый важный процесс, именно способ постепенного удвоения и складывания тех частных множителей, из которых может быть образован первый множитель произведения. Эта «бинарная процедура» ¹⁾ часто сокращается благодаря тому, что оказывается возможным использовать десятичную систему чисел, вводя еще умножение на 10, как это видно из второго примера для случая умножения на 14. При этом надо обратить внимание на то, что умножение на 10 не требует никаких вычислений, а только замены определенных числовых знаков тем же числом других определенных знаков. Этот обход основной процедуры путем введения умножения на 10 иногда еще усложняется дополнительным делением пополам, чтобы получить умножение на 5, как видно из последнего примера. При этом важно обратить особое внимание на то, что все эти процедуры основаны исключительно на сложении и, неизвестно ни одного примера, чтобы вычисление сокращалось при помощи вычитания (т. е. умножение на 9 всегда происходит путем $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 + 1$ и никогда не происходит путем $10 - 1$).

Теперь перейдем к задачам на деление.

В качестве первого примера мы подвергнем рассмотрению способ, точно соответствующий бинарному удвоению:

(19 : 8)	1	8	(16 : 3)	/ 1	3
	/ 2	16		2	6
	$\overline{2}$	4		/ 4	12
	/ $\overline{4}$	2		$\overline{3}$	2
	/ $\overline{8}$	1		/ $\overline{3}$	1
т. е. $19 : 8 = 2 + \overline{4} + \overline{8}$			т. е. $16 : 3 = 5 + \overline{3}$		

В примере на деление $19 : 8$ исходное число ²⁾ сначала удваивается, благодаря чему получается 16. Далее производится ряд последовательных делений исходного числа пополам, до тех пор, пока из четверти и восьмой не получаются остальные три единицы, составляю-

¹⁾ Словом «бинарный» я перевожу термин Нейгебауера *dyadisch*. Переводчик.

²⁾ То-есть делитель. Переводчик.

щие разницу между 16 и 19. Второй пример — деление $16 : 3$. По получении результата $3 + 12 = 15$ последняя единица находится путем деления на 3. Важно и характерно, что при этом идут окольным путем: не находят сразу $\bar{3}$, а сначала образуют $\bar{\bar{3}}$. Таким окольным путем идут не только в этом случае, но и во всех других случаях, когда приходится вести счет на третью. Итак, в то время как в сфере целых чисел (за исключением одного отступления от общего порядка, стоящего в связи с десятичной системой) существует только один способ умножения, именно способ последовательного удвоения, процедура деления распадается на два ряда: во-первых, на «половинный ряд»: $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \dots$, во-вторых, на «двухтретный ряд»: $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{12}, \dots$. Для каждого из этих рядов характерна процедура деления пополам, по исходный пункт различен: в одном случае $\bar{2}$, в другом $\bar{\bar{3}}$.

Для понимания техники деления в целом необходимо уяснить себе, что внешне графические образы алгоритма деления и умножения почти полностью совпадают друг с другом. Как мы видели выше, в гл. III, § 3, дроби отличаются от целых чисел только знаком r , поставленным над числом. В иератическом шрифте это r сокращается в точку, поставленную над числовым знаком, так что египетский способ написания вполне аналогичен тому, который применяем мы здесь, когда пишем n и $\bar{n}$ (ср. рис. 24 на стр. 89). Если мы хотим свыкупиться с египетским способом счета, то для этого безусловно очень важно пользоваться символикой, аналогичной египетской, а не такой символикой, которая подобно нашей оперирует с числителем и знаменателем.

Подобно тому, как это было отмечено для целых чисел, и в дробях подчас оказывается полезным деление на 10, как это видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r}
 (4 : 15) \quad \begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \hline 10 \quad 1 + \bar{2} \\ / \quad 5 \quad 3 \\ \hline 15 \quad 1 \end{array} \\
 \text{т. е. } 4 : 15 = \bar{5} + \bar{15}
 \end{array}$$

Наконец, дадим пример на деление с дробью в делителе:

$$\begin{array}{r}
 [2 : (1 + \bar{3} + \bar{4})] \quad \begin{array}{r} / \quad 1 \quad 1 + \bar{3} + \bar{4} \\ \quad \bar{3} \quad 1 + \bar{18} \\ \quad \bar{3} \quad \bar{2} + \bar{36} \\ / \quad \bar{6} \quad \bar{4} + \bar{72} \\ / \quad \bar{12} \quad \bar{8} + \bar{144} \\ / \quad \bar{228} \quad \bar{144} \\ / \quad \bar{114} \quad \bar{72} \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{т. е. } 2 : (1 + \bar{3} + \bar{4}) = 1 + \bar{6} + \bar{12} + \bar{114} + \bar{228}$$

Подобного рода вычисление является по сравнению с другими вспомогательными средствами, применяемыми в египетской математике, довольно сложным. Как строились такие вычисления, будет подробно сказано ниже (см. стр. 161, сноска). Мы опишем сначала внешний ход действий. Бросается в глаза, что египетская математика пользуется рядом, начинающимся с $\frac{2}{3}$. Начиная со второй строки, переход от строки к строке непосредственно ясен (следует обратить внимание на полную аналогию внешнего цифрового выражения с цифровым выражением при вычислениях с целыми числами!), но совершенно неясно, как из первой строки получалась вторая. За этим переходом скрываются определенные правила египетской математики для действия над дробями. По этим правилам для образования $\bar{3}$ от $1 + \bar{3} + \bar{4}$ необходимо образовать следующие слагаемые: $\bar{3} + \frac{2}{9} + \bar{6}$ и $\frac{2}{9}$ заменить каноническим представлением $\bar{6} + \overline{18}$. Таким путем и получается сумма

$$\bar{3} + \bar{6} + \overline{18} + \bar{6} = \bar{3} + \bar{3} + \overline{18} = \bar{1} + \overline{18}.$$

Отсюда видно, что в процессе действий над дробями надо постоянно пользоваться определенными правилами, указывающими, как дробь с числителем 2 превращать в суммы дробей с числителем 1. Уже из того, что мы успели узнать о египетской технике действий над дробями, видно, что в процессе этих действий мы снова и снова встречаемся с задачей удвоения известного выражения (и только с этой задачей). Если дробь имеет четные знаменатели, то при удвоении знаменатель просто делится пополам. Для случая же, когда n оказывается нечетным (как мы узнаем из всех дошедших до нас египетских вычислений), выражение $\frac{2}{n}$ для каждого n разлагается в сумму дробей с числителями 1 по вполне определенной схеме, например:

$$\frac{2}{9} = \bar{6} + \overline{18}$$

$$\frac{2}{11} = \bar{6} + \overline{66}$$

$$\frac{2}{13} = \bar{8} + \overline{52} + \overline{104}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{89} = \bar{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$$

$$\frac{2}{91} = \bar{70} + \overline{130}$$

$$\vdots$$

Это сведение всех дробей к дробям с числителем 1, так называемым «основным дробям», мы будем в дальнейшем называть «*постулатом основных дробей*» египетской арифметики дробей. Разумеется, если посмотреть на вопрос с чисто математической точки зрения, то эта задача многозначна, т. е. любое выражение $\frac{2}{n}$ может быть разложено в сумму $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$ многими различными способами, причем все мыслимые разложения равноправны между собой, исключая лишь само собой подразумевающееся разложение $\frac{2}{n} = \frac{2}{n}$. Но как раз это «*тривиальное разложение*» никогда не применяется в текстах, а для каждого n применяется одно вполне определенное разложение; примеры таких разложений приведены нами выше. Поэтому перед нами стоит задача — выяснить, какова особенность этих «*канонических разложений*».

Уже из немногих приведенных здесь примеров отчетливо видно отличие египетской математики от вавилонской. Вавилонская техника счета является вполне цельной и внутренне-завершенной системой. В ней отсутствует специфическая проблематика действий над дробями, если оставить в стороне вопрос о приближенных значениях бесконечных шестидесятеричных дробей, поскольку этот вопрос до сих пор еще не выяснен. Египетская математика ставит перед нами совершенно иные вопросы. Действия с целыми числами покоятся на описанной выше бинарной процедуре: в этом случае египетская математика стоит еще на чисто а д д п т п в п о й ступени, когда умножение сводится еще к ряду последовательных сложений. Но еще резче это явление проявляется в собственной области действий над дробями. Здесь перед нами явления, выходящие из рамок чисто математических процессов. Эти явления могут быть поняты только чисто исторически. Правда, и в вавилонской вычислительной технике нам удалось открыть следы ее предшествующей истории развития, особенно в вопросе о связи между таблицей умножения и таблицей обратных значений (ср. гл. I, § 2, б) и в вопросе о происхождении основания 60. Но это всё вопросы до-истории вычислительной техники, тогда как в своем окончательном исторически сложившемся состоянии эта вычислительная техника не нуждается для своего объяснения в привлечении этой доистории. Напротив, если бы мы стали в египетской вычислительной технике искать какую-либо внутренне законченную математическую процедуру, то мы пошли бы по совершенно ложному пути. Такой законченной системы в египетской математике, очевидно, не существует. Правда, система целых чисел — десятичная. Правда, как мы видели, часто особенностями этой системы пользуются для вычислений. Однако в основе своей части развитие вычислений с целыми числами идет только по линии бинарной системы; впрочем, и в этой системе есть прорыв, например в том случае, когда система бинарного ряда расщепляется на две линии, именно на два ряда, из которых один имеет началом $\frac{1}{2}$, а другой $\frac{2}{3}$. Очевидно, к этим явлениям привела не законченная и осознанная математическая теория, а совершенно другие движущие силы.

Прежде чем перейти к этим частным вопросам, необходимо заняться более общим вопросом — о классификации математических текстов. Значительная часть задач в математических папирусах имеет весьма однообразную структуру, так что число типов известных нам вообще задач сравнительно очень мало. Одна группа вычислений относится собственно к действиям над дробями. К этим вопросам мы еще вернемся и подробно остановимся на них. Закрытую группу составляют так называемые «вычисления $\bar{y}$ », о которых мы говорили уже выше (стр. 127). Ряд геометрических задач будет разобран нами в ближайших параграфах. Остается последний тип — класс «вычислений psw », обзор которых дан на приложенной таблице (стр. 135). Слово psw ¹⁾ происходит от корня psf . «варить», и представляет собой *terminus technicus* для изготовления хлеба и для связанной с ним фабрикации пива. Чем больше число хлебов, т. е. количество зерна, употребленного для изготовления определенного количества пива, тем крепче это пиво. Если A — число хлебов или кружек пива, а G — употребленное для этого количество зерна, то под psw хлеба или пива подразумевается отношение $p = A : G$. Чем меньше величина этого отношения, тем плотнее хлебы и крепче пиво. Все вычисления psw посвящены решению простой задачи — вычислить одну из этих трех величин по двум другим. Иногда задача усложняется тем, что дополнительно даны еще отношения между ценами различных сортов зерна; это может быть выражено так: $G = \mu \bar{G}$ и соответственно $\bar{p} = \mu p$ ²⁾. Приложенная таблица показывает, какого рода задачи составлялись по таким данным и как они решались. Исключая самые простые случаи первого ряда, задачи остальных рядов следует понимать приблизительно в таком смысле (М 5 и М 8): дано число хлебов или число кружек пива A_1 качества p_1 ; каково должно быть число (хлебов или кружек пива) A_2 известного качества p_2 , если требуется, чтобы оно было «равноценно» первому числу в том смысле, чтобы для первого числа было потрачено количество зерна $\bar{G} = \frac{1}{\mu} G$. Если мы тщательно проследим за всеми подробностями выкладок в этих задачах, то легко убедимся, что эти вычисления нельзя понимать, например, как замаскированные пропорции, но что всегда исходят из конкретного значения вычисленных количеств и величин, вследствие чего получается впечатление, что задача решена совершенно окольным путем (см., например, R 72). Таким образом вся эта группа задач находится в теснейшей связи с фактическими потребностями египетской хозяйственной жизни и вовсе не задумана как ряд теоретических математических примеров³⁾.

В самом деле, понятие psw встречается очень часто как раз в самых различных текстах не математического, а чисто хозяйственного

¹⁾ При вставке гласных читается приблизительно как *pesu*.

²⁾ Черточка над буквой в этом случае, разумеется, не имеет ничего общего с обозначением для обратной величины.

³⁾ Это обстоятельство подчеркнуто еще тем фактом, что отношение цен между сортами зерна никогда не дается непосредственно, а предполагается известным решающему, хотя это отношение далеко не простое, как, например, 13 : 6 или 3 : 8 и т. д.

R 70, R 69 $G, A, g = ? p = ?$ Вычисления: 1. $A : G = p$ Проверка: $G \cdot p = A$ 2. $G : A = g$ Проверка: $g \cdot A = G$	M 12 $G, A, \bar{p} = ?$ Вычисления: $A : \bar{p} = \bar{p}$	M 20 $A, \bar{p}, G = ?$ Вычисления: $\frac{\mu}{p} \cdot A = G$	M 15 $G, p, A = ?$ Вычисления: $G \cdot p = A$
R 77, R 78, R 75, R 73 $(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, p_2)$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G \cdot p_2 = A_2$ Проверка: $(A_1, p_1) \approx G (A_2, p_2) \approx G$	M 5 = M 4 $(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?, \bar{p}_2)$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G$ $\frac{1}{\mu} G = \bar{G} \cdot \bar{p}_2 = A_2$	R 74 $(A_1, p_1) \approx (p_2 = ?; A_2', p_2'') [(G' = G'')]$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G$ $\frac{1}{2} G p_2' = A_2'$ Проверка: $(A_1, p_1) \approx G$ $(A_2', p_2') \approx \frac{1}{2} G (A_2'', p_2'') \approx \frac{1}{2} G$	R 76 $(A_1, p_1) \approx (A_2 = ?; p_2', p_2'') [A_2' = A_2'']]$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G$ $G \cdot \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_2''} = A_2'$ Проверка: $(A_1, p_1) \approx G$ $(A_2', p_2') \approx G' (A_2'', p_2'') \approx G'' [G' + G'' = G]$
M 22 $G \approx (A_1, p_1 = ?) + (A_2, \bar{p}_2)$ Вычисления: $(A_2, \bar{p}_2) \approx G_2 \quad G - G_2 = G_1$ $[A_1 : G_1 = p_1]$	M 9 = M 13 $G \approx (A_1, p_1) + (A_2 = ?; p_2', p_2'') [A_2' = A_2'']]$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G_1 \quad G - G_1 = G_2$ $g_2' = \frac{1}{p_2'} - \frac{1}{g_2''} = \frac{1}{p_2''} - \frac{1}{g_2''}$ $G_2 : (\bar{p}_2' + g_2'' + g_2'') \mu = A_2' = A_2''$	M 9 = M 13 $G \approx (A_1, p_1) + (A_2 = ?; p_2', p_2'') [A_2' = A_2'']]$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G_1 \quad G - G_1 = G_2$ $g_2' = \frac{1}{p_2'} - \frac{1}{g_2''} = \frac{1}{p_2''} - \frac{1}{g_2''}$ $G_2 : (\bar{p}_2' + g_2'' + g_2'') \mu = A_2' = A_2''$	M 9 = M 13 $G \approx (A_1, p_1) + (A_2 = ?; p_2', p_2'') [A_2' = A_2'']]$ Вычисления: $(A_1, p_1) \approx G_1 \quad G - G_1 = G_2$ $g_2' = \frac{1}{p_2'} - \frac{1}{g_2''} = \frac{1}{p_2''} - \frac{1}{g_2''}$ $G_2 : (\bar{p}_2' + g_2'' + g_2'') \mu = A_2' = A_2''$
Основное соотношение: $Gp = A$. Знак $\approx$ указывает, что в тексте, как нечто само собою подразумевающееся, принимается, что количество A качества p равносильно количеству зерна G .			
M 24 $G \approx (A_1, p_1 = ?) + (A_2, p_2 = ?)$ $ap_1 = p_2$ Вычисления: $\left(\frac{1}{a} A_2 + A_1\right) : G = p_1$ $ap_1 = p_2$			

содержания. Таковы, например, тексты, представляющие собой приходо-расходные книги, относящиеся к поставкам хлеба и пива для различных отделов хозяйства царского двора, причем точно указано, какое *р^ш* должен иметь хлеб, предназначенный для различных групп.

Вообще с исторической точки зрения выделение египетских математических текстов в особый класс текстов, противопоставленный остальным папирусам, есть принципиальная ошибка. В действительности эти тексты относятся к числу практических орудий ремесла писцов, а эти писцы, как известно, играли чрезвычайно важную роль в деле управления древним Египтом. Какого рода были те задачи, которые ставились таким писцам, видно с полной ясностью из следующего текста, взятого из папируса, в котором один писец ставит другому на вид его невежество в самых важных вещах:

«Ну вот, Ты приходишь и наполняешь меня Твоей должностью. (Теперь я хочу) объяснить Тебе, в чем Твоя сущность, когда Ты говоришь: «Я полномочный писец войска».

Тебе дают озеро, которое Ты должен выкопать. Тогда ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчет провианта для солдат, Ты говоришь: «Вычисли его мне». Ты несправен по своей должности и то, что я Тебя должен поучать выполнению Твоих обязанностей, обрушится на Твой же затылок.

Иди сюда, я скажу Тебе кое-что в дополнение к тому, что Ты сказал. Я ставлю тебя в затруднительное положение. когда я (заставляю тебя представить себе следующее): Ты — царский писец, Ты приведен к окпу (для аудиторки) для какого-нибудь замечательного дела, когда горы изрыгают огромные намятки для Гора (т. е. для царя), владыки обеих стран. Я открываю Тебе приказ Твоего господина. Ибо смотри, Ты — опытный писец, стоящий во главе войска. Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине — 30 локтей с ... в 15 локтей, и его ... имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на Тебя и говорят: «Мой друг, Ты — опытный писец, так реши же это быстро для нас». Вот Ты имеешь знаменитое имя; пусть же в этом месте пайдется хоть один, который возвеличит всех тридцать. Не допусти, чтобы о Тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и Ты не знаешь»¹⁾.

Задачи, встречающиеся в «математических папирусах», как раз того же типа, как этот текст. Надо полагать, что и тексты М и R были не чем иным, как собранием примеров для приобретения навыков в решении подобных задач. Писец должен был проработать эти задачи, чтобы уметь решать подобные задачи и на практике. Попятно, что такие тексты постоянно снова и снова переписывались, дополнялись и видоизменялись, как это нам прекрасно известно по дру-

¹⁾ По Эрману (II, 16), стр. 281 и сл.

гим литературным памятникам древнего Египта. Показательно в этом случае лишь то, что здесь мы несомненно имеем дело не с текстами, имеющими специфически математическую ориентацию, а с чем-то таким, что должен был знать каждый писец, заведывавший административными делами ¹⁾.

Поэтому если мы в наших нынешних изложениях египетской математики говорим о египетской «арифметике» или «геометрии» и т. п., то такая классификация является в своей основе искусственной и не отвечает точке зрения самих составителей этих задач. Это видно, например, из расположения задач в R. С нашей точки зрения вычисления объемов надо отнести к «геометрии». Но в папирусе в непосредственном соседстве с задачами на вычисление вместимости амбаров стоят задачи, в которых требуется превратить одни меры сыпучих тел в другие, иными словами, задачи чисто «арифметического» характера. Ясно, что с египетской точки зрения для установления близости задач друг к другу решающим моментом является не их математическое содержание, а их чисто практическое назначение, — в данном случае в одну группу объединены задачи, с которыми приходится иметь дело при хранении зерна. Нужно ли при решении этих задач применять определенные геометрические правила или нет, — это вопрос совершенно второстепенный.

Соответственно этому и планиметрия с египетской точки зрения относится к области землемерного измерения полевых участков; вопросы «геометрического» характера не вызывают большого интереса. Что касается геометрии, то и в Вавилонии положение вещей мало отличалось от только что описанного. Правда, вавилонян в математических проблемах интересует чисто математическая сторона вопроса, но (по крайней мере, поскольку мы можем судить на основании до-

¹⁾ В литературе можно найти два различных взгляда на египетские математические тексты. Эти противоречащие друг другу взгляды имеют целью дать объяснение крайне фрагментарному характеру дошедшей до нас информации об античной математике. По одному из этих взглядов папирус Райнда — «ученическая тетрадь» или другой какой-либо жалкий продукт того же рода. В действительности R принадлежит по типу к обыкновенным египетским папирусам и безусловно не является ученической тетрадью. Опубликование M подтверждает вполне эту точку зрения, так как этот текст по своему типу вполне совпадает с R.

По второй гипотезе якобы существовала тайная жреческая наука; это и явилось причиной того, что мы ничего не знаем о действительном объеме познаний египтян в математике. Это объяснение казалось очень плодотворным не только для египетской, но, равным образом, и для вавилонской математики, пока еще не были известны вавилонские математические тексты; подобное объяснение давалось и для математики пифагорейцев. Здесь достаточно указать на то, что нет никаких данных, которые указывали бы на связь египетской математики с религией. Кроме того, необходимо указать на то, что не только в Древнем, но еще и в Среднем царстве не могло быть речи о правильно организованном жречестве, подобном тому, которое существовало в более позднее время; наоборот, жреческие должности занимались светскими людьми в порядке совместительства. Ср. по этому вопросу, например, Эрман-Рауке (II, 14), стр. 330 и сл. Теория «тайной науки» восходит в последнем счете к тем представлениям, которые созданы у греков о египетской государственной организации на основании знакомства с самой поздней стадией египетской истории; она несколько не соответствует положению дел в Египте в эпоху возникновения наших текстов.

шедшего до нас до сих пор материала) геометрия играла в этом случае второстепенную роль. Я хочу этим сказать, что все внимание было обращено на алгебраическую обработку вопросов, имеющих своим источником геометрию. В Египте весь уровень математики на целую ступень ниже, чем в Вавилоне: для Египта вообще нет оснований предполагать постановку чисто алгебраических вопросов; здесь преодолеваемая трудность еще состоит всецело в том, чтобы овладеть действиями над числами. В Вавилонии действия над числами уже не играют основной роли; соответственно этому центр интереса лежит здесь уже в области математических взаимоотношений, как таковых. Но здесь не может быть еще речи ни о выделении геометрических вопросов в особую математическую дисциплину, ни о том, чтобы видеть в геометрии средство для выражения математических понятий. Подобные концепции появляются впервые у греков. В догреческую эпоху вся область геометрии является лишь ареной для применения математических навыков: в египетской математике — для применения вычислительной техники, в вавилонской — для конкретизации алгебраических взаимоотношений. Вопрос о причинах этого принципиального изменения в отношении к вопросам геометрии при переходе от догреческой математики к греческой является одним из наиболее интересных в историческом отношении вопросов. Мы займемся им во втором томе наших лекций при изучении роли атомизма и проблемы возникновения иррациональных чисел.

§ 2. ЕГИПЕТСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

а) Планиметрические задачи.

~. Если мы говорим здесь о египетской геометрии, причем еще подразделяем разбираемые в ней вопросы на вопросы планиметрического и стереометрического характера, то уже из сделанных выше замечаний ясно, что это всего лишь историческая, модернизирующая классификация, пылющая целью лишь более наглядное расположение материала.

Из дошедших до нас текстов ясно, что египтяне умели определять площадь прямоугольника, треугольника и трапеции и притом тем же путем, каким эти площади определяются теперь ¹⁾. При толковании

¹⁾ В литературе по египетской математике весьма популярна легенда, пу- щенная в оборот, насколько мне известно, М. Кантором. Утверждают, что в Египте для определения прямого угла пользовались веревкой с узлами, отстоя- щими друг от друга на расстояниях 3, 4 и 5, и что при этом мы имеем дело лишь с частным случаем применения теоремы Пифагора. По этому вопросу можно заметить следующее: 1) В текстах не содержится никаких указаний, которые подтверждали бы эту теорию. Свидетельство Демокрита, приведенное Кан- тором, относится к совершенно другим временам; см. по этому вопросу, например, G a n d z [QS B 1 (V, 1), стр. 255 и сл.]. 2) От знакомства с чисто числовым тожде- ством $9 + 16 = 25$ до геометрического вывода о равенстве между некоторы- ми площадями, связанными с прямоугольным треугольником, еще очень боль- шое расстояние. В египетских текстах не содержится ничего, что давало бы малейшее основание постулировать у них подобные рассуждения.

Тем не менее нет оснований отрицать возможность того, что египетская гео- метрия знала теорему Пифагора. Но наши т е к с т ы не говорят ни за, ни про-

этих задач в наше время главной трудностью явилось толкование терминов для высоты и основания. Терминологию надо выводить из математической связи терминов в задаче; однако в том случае, когда все математическое ее содержание чересчур просто, как, например, когда для вычисления площади треугольника одна величина множится на половину другой, математическая связь оказывается недостаточной, чтобы дать определение этих терминов, которое было бы действительно единственно возможным. Так, например, в данном случае остается открытым вопрос, следует ли считать эти величины перпендикулярными друг к другу, т. е., иными словами, следует ли считать формулу для площади треугольника точной или же только приближенной. Большим преимуществом вавилонской математики по сравнению с египетской является то, что в первой мы имеем дело с несравненно более сложными вычислениями, чем в египетской; поэтому чисто математические связи ограничивают возможности толкования столь тесными рамками, что не остается места для каких бы то ни было сомнений относительно вещей такого рода. При решении вопросов египетской терминологии нам очень часто необходимо ограничиться исключительно доводами филологического характера, благодаря чему отсутствует полная уверенность в правильности принятого толкования. Несмотря на это, в настоящее время можно почти определенно утверждать, что, например, элементарные формулы для площадей необходимо толковать в смысле п р а в и л ь н ы х формул.

Впрочем, не может быть сомнения в том, что наряду с этим существовали и приближенные формулы. Так, до нас дошли очень длинные надписи на стене храма в Эдфу со списками подаренных полей. Здесь даны длины четырех сторон a , b , c , d и площади полей¹⁾. Эти последние

тут такой возможности. По поводу же чисто археологического вопроса о том, как практически находили прямой угол в египетской строительной технике, см. L. Borchardt, *Längen und Richtungen der vier Grundkanten der grossen Pyramide bei Gise*, Berlin, Julius Springer, 1926.

¹⁾ Это толкование Нейгебауера, на мой взгляд, неправильно. Как мы только что видели, Нейгебауер отказывается присоединиться к взгляду Кантора, по которому египтяне определяли площадь треугольника как произведение основания на боковую сторону; несмотря на то, что соответствующие египетские термины не могут еще быть переведены на русский язык, можно, по справедливому замечанию Нейгебауера, быть уверенным в том, что интересующие нас места необходимо толковать в смысле п р а в и л ь н ы х формул. Это неизбежно вытекает из всего того, что мы знаем о египетской геометрии; правда, в средневековых рецептах, восходящих, быть может, к Египту, площадь действительно определяется таким образом, но это — лишь характерное для эпохи упадка искажение.

Однако вслед за этим Нейгебауер утверждает, что египтяне определяли площадь четырехугольника как произведение полусумм противоположных сторон. Между тем все, что сказано о треугольнике, относится и к четырехугольнику. В соответствующем документе из Эдфу читается только: «22 на 23; 4 на 4; это равно 90» и т. п.; того, что 22, 23, 4 и 4 — стороны четырехугольника, здесь не сказано. Кантор был по-своему вполне последователен, когда давал такое толкование: ему не было еще известно открытие Тураева, и он видел в египетской геометрии грубо прикладную науку. Но нельзя понять, почему Нейгебауер примыкает к Кантору в вопросе о четырехугольнике и не хочет следовать за ним в вопросе о треугольнике. Он ссылается, правда, на Лепснуса, но это просто недосмотр: Лепснус видит в этих величинах не сто-

можно получить, образовав из длин сторон выражение $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$.

Значительное число полей в этом списке имеет треугольную форму. В этом случае длина задается приближенно по следующей схеме: западная сторона a , восточная b , южная c , северная «ничего».

Площадь получается и в этом случае из выражения $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2}$.

Во всех этих случаях мы имеем дело с приближенными вычислениями, относящимися к вполне определенным полям, причем площадь дается с точностью, вполне достаточной для практических целей.

Из выкладок текстов М и R видно, что египтяне обладали поразительно точной приближенной формулой для площади круга. Способ этот состоит в том, что из диаметра d отнимается одна девятая его и полученное выражение умножается само на себя. Иными словами, площадь круга определяется по формуле

$$F = \left(\frac{8}{9} d\right)^2 = \pi d^2,$$

роны, а ширины и длины четырехугольника в координатных направлениях, если одна из сторон взята за ось абсцисс, а ее начало — за начало координат (см. мою статью в «Архиве истории науки и техники», т. I, стр. 63; там же воспроизведен чертеж Лепснуса). И в самом деле, приписываемая египтянам формула не могла быть получена даже эмпирически, так как она никогда не верна, а в обычных случаях дает погрешность в 100—200% (в отдельных случаях эта погрешность равна 900% и выше!). Между тем при толковании Лепснуса эта формула в большинстве случаев дает довольно точный результат. В моей указанной статье я показал, что и аналогичная формула у Герона (восходящая к египетской науке) может толковаться только в том смысле, что берется полусумма координат; вдобавок при таком толковании она представляет собой обычное для древнего Востока приближенное решение по методу среднего.

В защиту канторовского толкования выдвигается только один довод: толкая четыре данные величины как стороны, мы получаем формулу однозначную; при толковании же их как «ширины» и «длины» получается формула многозначная; в самом деле, результат несколько изменяется в зависимости от того, какую сторону мы возьмем за ось абсцисс. Думают, что этой многозначности египтяне не могли не заметить. Однако на это можно возразить, что в этом же документе из Эдфу имеются случаи, когда одна из четырех величин есть нуль; например,

«ничего на 5, 17 на 17; это равно $42 \frac{1}{2}$ ». Имеется в виду, конечно, треугольник;

четвертая из величин в этом случае равна нулю. Как мы видим, эта формула для данных случаев не однозначна как раз при толковании Кантора и Нейгебауера: в самом деле,

$$\frac{0+5}{2} \cdot \frac{17+17}{2} = 42 \frac{1}{2}, \text{ но } \frac{0+17}{2} \cdot \frac{5+17}{2} = 93 \frac{1}{2};$$

наоборот, при толковании Лепснуса для этого случая формула окажется однозначной и совершенно верной (это — прямоугольный треугольник с катетами 5 и 17). Итак, толкование Кантора и Нейгебауера не имеет даже и этого преимущества. Вдобавок в этом документе речь идет о земельных участках; Лепснус, исходя из своей гипотезы, даст чрезвычайно убедительный план расположения участков; стоит попробовать начертить тот же план, предполагая, что данные величины — стороны, чтобы убедиться, что получающееся веерообразное расположение участков абсурдно и невероятно с землемерной точки зрения.

Таким образом приписать такое невежество египетской геометрии невозможно. *Переводчик.*

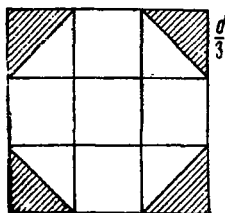
в которой κ есть приближенное значение для $\frac{\pi}{4}$, соответствующее $\pi \approx 3,1605 \dots$ Как пришли египтяне к этой формуле для площади круга, на основании сохранившегося в текстах материала сказать нельзя. Единственный, весьма слабый намек на истинное положение вещей в этом случае можно получить из следующего рассуждения.

Коэффициент $\kappa = \left(\frac{8}{9}\right)^2$ производит впечатление неизменяющегося коэффициента; мы встречаем его не только при вычислении площади круга, но и при вычислении длины окружности, причем эта длина, поскольку мы можем судить, вычисляется не как $\left(\frac{16}{9}\right)^2 d$, а как $\left(\frac{8}{9}\right)^2 4d$ ¹⁾. Так как

площадь круга $F = \kappa d^2$, а окружность $U 4\kappa = d$, то, по видимому, надо допустить, что формула для площади послужила исходным пунктом, так как κ — это отношение площадей, а не окружностей. Весьма естественным было бы предположение, что при нахождении κ исходили из сравнения площади круга с



а



б

Рис. 37.

площадью описанного квадрата, у которого обрезались углы; в самом деле, фигура, приложенная в напирусе к задаче R 48, по видимому, указывает на такую возможность, так как здесь площадь круга сравнивается с площадью квадрата (рис. 37, а). Особенности структуры коэффициента κ наводят на мысль, что первоначально углы квадрата обрезались таким образом, чтобы от каждой стороны квадрата оставалась нетронутой средняя треть; однако при таком предположении первым приближением для площади квадрата было бы $d^2 - \frac{2}{9} d^2$

(рис. 37, б). Трудно понять, как можно было от этого выражения прийти к выражению для κ в египетской формуле. Поэтому вряд ли рационально до нахождения нового материала в текстах строить предположения об истории возникновения этой

формулы, так как естественный и сам собой напрашивающийся путь, очевидно, не ведет к цели.

С нашей точки зрения к области планиметрии относится также способ образования понятий, применяемых для описания наклонных плоскостей, и потому мы остановимся на нем здесь. Для этой цели указывается, на сколько ладоней отклоняется покатость от вертикали при высоте по вертикали в один локоть. Так как в локте 7 ладоней, то эта мера уклона соответствует выражению $\mu \operatorname{ctg} \alpha$ при $\mu = 7$ (рис. 38).

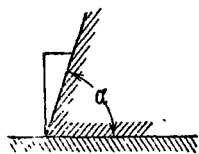


Рис. 38.

¹⁾ Это толкование опирается на разобранный ниже интерпретацию примера М 10 (см. стр. 146).

В Вавилоне мы также встречаемся с аналогичным способом образования понятия. Разница лишь в том, что в Вавилоне горизонтальные отрезки измеряются в GAR, а вертикальные — в локтях, причем 1 GAR включает в себе 12 локтей. Поэтому в Вавилоне покатости задаются выражением, аналогичным $\frac{1}{\mu} \operatorname{ctg} \alpha$, с $\frac{1}{\mu} = 0;5$.

б) Объемы.

Подобно тому, как мы это видели в планиметрии, и в этой области наши тексты содержат ряд примеров на решение элементарных задач: на куб и на параллелепипед, на объем цилиндра, — эта последняя задача имела целью вычисление объема амбаров для зерна; о способе вычисления площади круга мы уже упоминали в предшествующем разделе.

Весьма поучительную картину для характеристики наших текстов мы получаем из сравнения задач R 44 и R 45. Здесь требуется определить объем пространства кубической формы. По причинам чисто метрологического характера, не интересующим нас в настоящей связи, объем паходится по формуле

$$V = a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{20};$$

так как ребро куба $a = 10$ дано, то получается $V = 75$. В ближайшей задаче R 45 требуется по объему $V = 75$ найти длину ребра a . Мы ожидаем, естественно, что из выражения $20 \cdot \frac{2}{3} \cdot V$ будет извлечен кубический корень. В действительности ничего подобного не делается (кстати, мы и вообще не знаем ни одного примера извлечения кубического корня в Египте). Вместо этого образуется выражение

$$20 V \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{3},$$

дающее, правда, правильное значение $a = 10$, но именно поэтому являющееся совершенно бессмысленным: в самом деле, множитель $\frac{1}{10^3}$ уже предполагает, что искомая величина $a = 10$ известна. Как объяснить столь очевидную нелепость? Как мне кажется, причина лежит в характере рукописной традиции наших текстов. Первоначальная задача R 44 не содержит погрешностей, вполне осмыслена с практической точки зрения и принадлежит к какому-либо собранию задач, относящихся к амбарам для зерна. Подобные же группы задач для других вопросов несомненно были собраны в других маленьких текстах. Затем тексты такого рода были соединены в большие собрания вроде R и с них снова и снова снимались копии. При каждом таком соединении отдельных частей в большие тексты и при каждой переписке имели место перестановки и дополнения писцов¹⁾. R 45 явля-

¹⁾ Надо всегда иметь в виду, что те, которые пользовались нашими текстами и хранили их, были простыми писцами из государственных или частныхладельческих контор, а никак не какими-либо «математиками» по призванию.

ется поэтому делом рук какого-то копировщика, который хотел подвергнуть текст обработке, прибавив к одной из задач еще и обратную ей задачу; в первоначальной редакции этот случай был мудро обойден, так как он приводил к формулам, преобразование которых превышало действительные силы египетской математики.

Необходимо упомянуть еще об одном вычислении. Оно читается на папирусе, правда, из Египта, но очень позднем (III в. н. э) и написанном на греческом языке. Это — вычисление объема водяных часов, имеющих форму усеченного конуса. Пусть D и d — большой и малый диаметры усеченного конуса и h — его высота. Объем вычисляется по формуле

$$V = \frac{h}{12} \left(\frac{3}{2} (D + d) \right)^2.$$

Смысл этой формулы станет ясным, если рассматривать 3 как приближенное значение для π . Тогда эта формула равнозначна выражению

$$V \approx \frac{h}{4\pi} U_m^2,$$

где

$$U_m \approx \frac{D + d}{2} \pi$$

означает среднюю окружность усеченного конуса. Эта формула является, таким образом, во всех смыслах только приближенной формулой, хотя, как мы знаем, уже в древнем Египте было известно много лучшее приближение, не говоря уже о приближениях, применявшихся в греческой математике. Из клинописных текстов нам также известна формула, примененная здесь для площади круга:

$$F = \frac{U^2}{12}$$

(ср. гл. V, стр. 187). Эта параллель мне кажется особенно достопримечательной: она показывает, что из наличия грубо приближенных формул для решения практических задач нельзя делать непосредственного заключения, что эти формулы были единственными известными тогда формулами. Только в том случае, когда сравнительно большой материал дает нам возможность сделать заключение об общем типе задач, можно с большей или меньшей уверенностью говорить о возможности или невозможности существования определенных математических знаний.

Самым блестящим достижением всей египетской математики вообще является правильная формула для объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями (M 14):

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

(a , b — длины сторон оснований, h — высота). В этой формуле прежде всего поражают две вещи: с одной стороны, ее симметричный вид, а с другой — ее математическая точность. Дело в том, что как раз для получения этой формулы, если только вывод сделан правильным

способом, безусловно необходимо оперировать с бесконечно малыми, т. е. выйти за пределы элементарной геометрии.

Когда мы говорим о формуле, то, разумеется, это слово надо здесь, как и в других местах, понимать в том смысле, что хотя в тексте все операции производятся только с данными конкретными числами но при этом руководятся рецептом, выраженным нашей формулой. Особенностью данного примера является то, что здесь абсолютно нет каких-либо существенных затруднений для толкования текста по

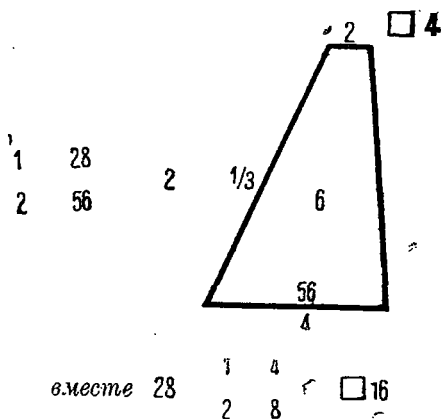
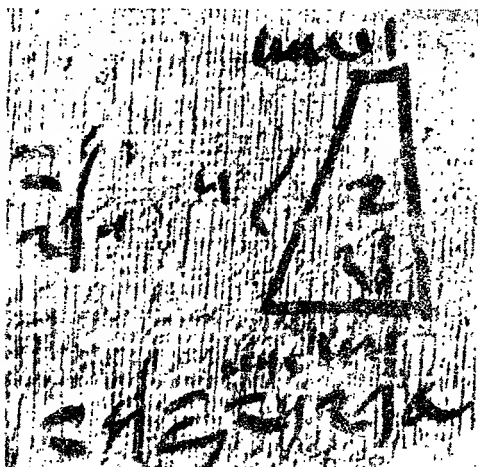


Рис. 39.

математическому содержанию: кроме всего прочего к тексту приложен чертеж и дано непосредственное объяснение числовых данных (рис. 39). Возникает только вопрос, идет ли речь о прямой или несимметричной усеченной пирамиде. Чертеж в тексте говорит за второе толкование, но необходимо заметить, что в большей своей части чертежи в наших текстах (как папирусных, так и клинописных) крайне неточны и совершенно не соответствуют содержащимся в условии размерам. Но есть и доводы по существу, вынуждающие меня полагать, что здесь шла речь о несимметричном теле. Уже в предыдущем разделе мы видели, что наклон выражается отношением величин, выраженных в ходовых мерах, именно: разность между абсциссами выражается в ладонях и берется ее отношение к высоте, выраженной в локтях. Такая нормировка взята, очевидно, непосредственно из практики.

Из многочисленных египетских сооружений нам известно, что поверхностям степ придавался небольшой уклон, так что неровные размеры становятся непосредственно попятными из конструктивных соображений. Мне кажется, что и вычисление объема усеченной пирамиды объяснялось нуждами практического строительства как определение объема или, вернее, веса углового блока, ограниченного двумя наклонными плоскостями. Если это так, то придется допустить, что мы имеем дело с телом вроде того, которое изображено на рис. 40.

Этот рисунок дает нам непосредственное представление о том, как выводилась интересующая нас формула. При этом надо обратить внимание на то, что все тело можно представить себе состоящим из параллелепипеда, имеющего объем $h \cdot ab$ (образованного из внутренней части пирамиды, имеющей форму параллелепипеда, к которой прибавлены две конгруэнтные боковые призмы), и из пирамиды с основанием $(a - b)^2$ и высотой h . Если допустить, что египтяне умели правильно вычислять объем этой пирамиды, то они должны были получить в качестве объема

$$\frac{h}{3} (a - b)^2 = h \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{3} ab + \frac{b^2}{3} \right).$$

Если прибавить сюда еще объем $h \cdot ab$ (объем первого тела), то получится наша формула.

Предпосылки, на которых основано это рассуждение, таковы, что можно допустить, что они были известны в египетской математике. В случае несимметричного тела геометрическое разложение на части обладает непосредственной очевидностью. Единственное преобразование, к которому приходится прибегнуть, это возведение в квадрат бипома $a - b$, но как раз такое разложение засвидетельствовано в тексте [ср. выше, стр. 128, **В 1**¹⁾], а замена ab и $-\frac{2}{3} ab$ выражением $\frac{1}{3} ab$ вполне обычна как раз в египетской математике и не требует никаких преобразований²⁾. Действительно существенной предпосылкой является, разумеется, допущение, что египтянам была известна правильная формула для объема пирамиды. Но, повидимому, мы имеем право это допустить, так как именно наш пример показывает, что им была известна формула для тела такого же строения, но значительно более сложного (в задачах на пирамиды в **R**, к сожалению, содержатся в сущности только планиметрические проблемы, именно задачи нахождения наклона). Ломать себе голову над вопросом, как египтяне пришли к точной формуле для объема пирамиды, не имеет большого

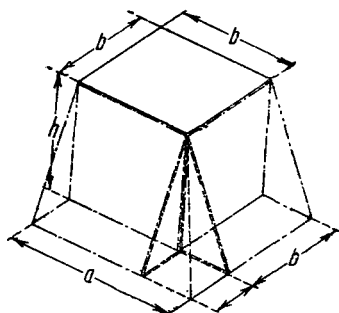


Рис. 40.

¹⁾ В указанном месте (задача **В 1**) такого разложения не содержится; толкование его у Нейгебауера вдвойне неверно:

а) формула $(a + b)^2$, легко интерпретируемая геометрически, значительно проще формулы $(a - b)^2$, и знание первой еще не предполагает знания второй;

б) возведение $\bar{2} + \bar{4} \left(\frac{3}{4} \right)$ в квадрат, содержащееся в задаче **В 1**, равносильно обычной задаче $(\bar{2} + \bar{4}) \times (\bar{2} + \bar{4})$ или $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$; это умножение легко осуществить по обычным правилам египетской арифметики, и отсюда еще очень далеко до формулы сокращенного умножения (удвоенное произведение). *Переводчик.*

²⁾ Этот момент чрезвычайно важно учесть при всякой попытке объяснения. Объяснение кажется мне только тогда имеющим смысл, если оно ведет к нашей формуле, не выходя из рамок египетских приемов вычисления.

смысла, так как ясно, что здесь должна была содержаться неточность, ибо для получения этой формулы в общем случае нельзя обойтись без привлечения бесконечно малых. Наиболее простым мне представляется допущение, что правильная формула была найдена для какого-нибудь частного и наиболее простого случая

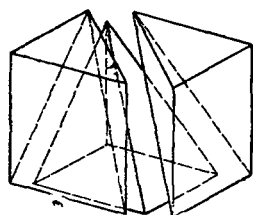


Рис. 41.

(например, подобно предыдущему случаю, для угловой пирамиды в кубе, см. рис. 41), при помощи какой-либо наглядной процедуры (в примере, изображенном на рис. 41, $\frac{a^3}{3} =$

$= \frac{a}{3} \cdot a^2$), а затем без дальних рассуждений распространена и на нетривиальные случаи. Во всем этом вопросе мне кажется существенным лишь то, что и в формуле М 14 нет ниче-

го такого, что могло бы заставить нас существенно изменить развитый нами выше взгляд на египетскую математику.

в) М 10.

В новейшей литературе по египетской математике сыграл большую роль один пример, содержащийся в Московском папирусе, а именно М 10; нам придется остановиться несколько подробнее на этом одном примере, так как он был истолкован как вычисление поверхности полушария. Если бы оказалось, что египтяне действительно знали теорему, по которой поверхность полушария в два раза больше площади большого круга этого шара, то это означало бы не только, что знаменитую теорему Архимеда надо датировать приблизительно на 1 000 лет раньше, чем это делаем мы, но и что вообще наши взгляды на общий уровень египетской математики необходимо изменить в корне, а это оказалось бы в полном противоречии с выводами из всего остального материала, содержащегося в источниках. Вот почему необходимо проанализировать здесь этот текст во всех подробностях. В еще более широком смысле этот пример поучителен тем, что он показывает, как велики трудности, возникающие при интерпретации математического текста в тех случаях, когда чисто математическая сторона настолько проста, что не исключает многозначности толкования.

В приложенной таблице (стр. 147) дан слева текст, в котором переведено лишь то, что не содержит никаких трудностей для перевода.

В правой части даны вкратце различные возможности толкования, которые мы в дальнейшем подвергнем более подробному рассмотрению. Рис. 42 показывает, в каком состоянии находится текст, транскрибированный здесь.

Мы начнем с рассмотрения данных нашей задачи. Из строки 4 (так же, как и из окончательного результата) следует с несомненностью, что речь идет о поверхности. Предмет, поверхность которого следует вычислить, назван в первой строке. Он написан при помощи иероглифа

Текст	Стр у ве	П и т
1 Пример на вычисление $nb.t$	Корзина = полушарие с устьем (d) по $4\frac{1}{2}$ в сохранности $i[nr.] = \text{шар}$	Корзина = полушар $\left[4\frac{1}{2}\right]$ в устье (d) на $4\frac{1}{2}$ в d (a) $i[p.t]$
2a Если тебе говорят: $nb.t$		
2b $m \text{ } 4\frac{1}{2} m \text{ } d$		
3 дай мне узнать ее поверхность		
4 возьми $\overline{9}$ от $\overline{9}$		
5 так как $nb.t$ есть половина i 		
6a это составляет 1	$2d - \frac{1}{9} 2d$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 2d \approx \frac{\pi}{4} 2d$
6b		
$\overline{9} \cdot 8 = \overline{3} + \overline{6} + \overline{18}$		
$8 - (\overline{3} + \overline{6} + \overline{18}) = 7 + \overline{9}$		
$(7 + \overline{9})(4 + \overline{2}) = 32 = \text{поверхность}$	$F = d \left\{ \left(\right) - \frac{1}{9} \left(\right) \right\} \approx \frac{d^2 \pi}{2}$	$F' = a \left\{ \left(\right) - \frac{1}{9} \left(\right) \right\} \approx a \frac{d \pi}{2}$

∩ *nb*, представляющего корзину. Далее следует иероглиф ∩ *t*, который является окончанием женского рода к слову *nb.t*. Наконец, мы видим черту |; какую роль играет эта черта, мы говорили уже выше, на стр. 92. Таким образом наиболее естественным переводом слова *nb.t* будет «корзина».

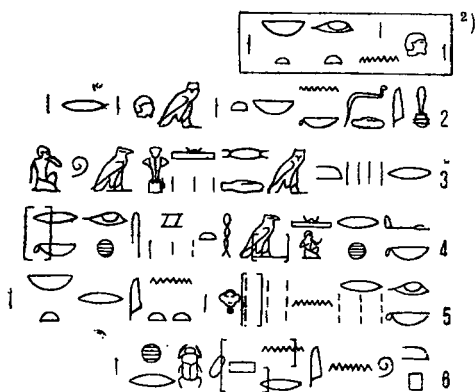
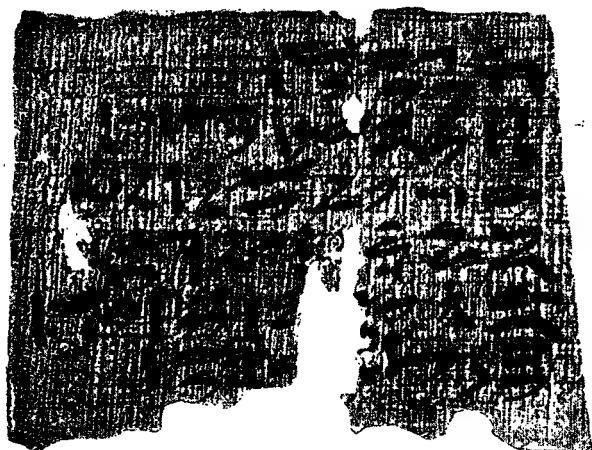


Рис. 42.

9—1=8, а затем от 8 берется одна девятая, что по египетским правилам действий с дробями дает $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Эта величина отнимается от 8 и результат умножается на $4\frac{1}{2}$, после чего для поверхности получается число 32.

Даже при поверхностном знакомстве с египетской математикой ясно, как надо интерпретировать эти числа. Первое число 9 необхо-

Основные трудности заключены в данных, содержащихся в строках 2b и 3, на которых мы сейчас и остановимся ¹⁾. Во всем тексте только один раз встречается числовое данное—это величина $4\frac{1}{2}$, кото-

рую мы будем обозначать через *t*. Вычисление начинается со строки 5 и не содержит никаких трудностей принципиального характера, исключая лишь объяснительное предложение в строке 6a. Сначала мы рассмотрим чисто формальную часть вычисления. Первая часть (строка 5) представляет собой требование образовать одну девятую от 9. Далее следует вычитание

¹⁾ Нумерация строк здесь, как и в дальнейшем, соответствует нумерации в прилагаемой таблице (стр. 147). В тексте же строкам, обозначенным здесь как а и b, соответствует только одна строка.

²⁾ Иероглифы, заключенные нами в четырехугольник, написаны красными буквами.

димо толковать как $2t$. При дальнейшем вычислении получаются формулы, содержащиеся в среднем столбце нашей таблицы. Формула второй строки показывает, что здесь образуется выражение, равнозначное $\left(\frac{8}{9}\right)^2 2t$, но выше (стр. 141) мы уже видели, что $\frac{8}{9}$ — это египетское приближенное значение для $\frac{\pi}{4}$, так что все вычисление может быть передано формулой

$$F = t \left\{ \left(2t - \frac{1}{9} 2t \right) - \frac{1}{9} \left(2t - \frac{1}{9} 2t \right) \right\} \approx \frac{1}{2} t^2 \pi.$$

До этого пункта не приходится иметь дело с какими-нибудь существенными трудностями в толковании этих вычислений, но в дальнейшем все зависит от того, каков геометрический смысл величины t . Даже если не углубляться в контекст, бросается в глаза, что t — единственное данное в нашем вычислении, очевидно, относящееся к кругу, — может быть либо диаметром d , либо радиусом r . Если сделать первое допущение, т. е. принять $t = d$, то вычисленная поверхность получит вид

$$F = \frac{1}{2} d^2 \pi,$$

если же держаться второго толкования, — то вид

$$F = \frac{1}{2} r^2 \pi.$$

Первое выражение в четыре раза больше второго; поэтому при первом допущении мы должны толковать нашу задачу как вычисление поверхности полушария, при втором же мы имеем вычисление площади полукруга. Отнюдь не входя в частности толкования текста, мы уже при первом знакомстве с ходом вычислений убеждаемся, что можем выбирать между двумя принципиально различными возможностями без того, чтобы самое вычисление давало нам возможность предпочесть одну другой.

Теперь мы перейдем к обсуждению первых строк текста и рассмотрим то толкование, которое было дано этой задаче В. В. Струве из Ленинграда, впервые обработавшим этот текст. И в этом случае мы начнем с наименее сомнительной части текста. Прежде всего несколько не будет противоречить тексту, если мы будем рассматривать обозначение «корзина» как термин для полушария. Иероглифический знак nb  говорит непосредственно за это толкование. Толкованию M 10 как задачи на нахождение поверхности полушария не противоречит и замечание, содержащееся в строке 6a: «так как $nb.t$ есть половина...», но с этого места начинаются первые затруднения. Одно не очень существенно и относится к первому шагу вычисления: «возьми $\frac{1}{9}$ от 9», который мы истолковали как образование $\frac{1}{9}$ от $2t$. Не совсем ясно, почему именно при этом шаге понадобилось замечание, что полушарие есть половина — мы дополнили бы: целого — шара. Из этого затруд-

нения можно выйти путем указания на то, что обычная формула для вычисления поверхности шара должна была иметь вид

$$F = t \left\{ \left(4t - \frac{1}{9} 4t \right) - \frac{1}{9} \left(4t - \frac{1}{9} 4t \right) \right\}$$

и что редактор текста, повидимому, посчитался с тем, что, поскольку речь идет о полшарии, надо уже с самого начала решения вместо обычных $4t = 18$ оперировать с $2t = 9$.

Вторая и гораздо более существенная трудность лежит в том, что в лакуне, находящейся в конце замечания, о котором мы только что говорили, нам приходится дополнить слово, обозначающее «шар». Однако нам не известно вообще никакого египетского слова, которое означало бы шар. В лакуне еще читается начало утраченного слова

(рис. 42), именно знак $\text{ḥ} \text{ḏ}$ ¹⁾. Поэтому первой мыслью, которая должна прийти в голову всякому, кто сколько-нибудь знаком с египетским языком, должна быть та, что здесь прежде читалось слово *itn*. Это — самое обыкновенное слово и оно означает прежде всего «солнце»²⁾, а кроме того, диск луны, и таким образом было бы отличным термином для шара. Но, к сожалению, текст в этом месте разрушен не настолько, чтобы это напрашивающееся дополнение могло быть осуществлено, так как сохранившиеся еще части знаков не могут принадлежать группе $\text{ḥ} \text{ḏ}$. Из этих сохранившихся еще остатков можно с несомненностью установить, что нижний из двух знаков, следовавших за $\text{ḥ} \text{ḏ}$, был не ḥ , а знак, который скорее всего следует читать как $t \Delta$ ³⁾; и, наконец, слово *itn*, «солнечный диск», сопровождается

¹⁾ Необходимо обратить внимание на то, что иероглифы, находящиеся среди текста нашей книги, печатаются слева направо, тогда как на фотографии гиератического текста и в иероглифической транскрипции, даваемой нами на рис. 42, буквы идут справа налево. См. сказанное по этому поводу выше, стр. 88. По вопросу о связи между гиератическими знаками, о которых мы здесь говорим, и иероглифами ср. рис. 24 на стр. 89.

²⁾ Это слово, несомненно, часто встречали и читатели, чуждые египтологии: оно употребляется для обозначения солнечного бога «Атона» (*itn* — относительно гласных в египетских словах ср. сказанное выше, стр. 91). Это слово составляет часть имени религиозного реформатора амарнской эпохи царя «Эхнатона». Его преемник «Тутанхамон» (*twt-ḥ-imn* = «Прекрасен в жизни Амон») первоначально назывался «Тутанхатон» (*twt-ḥ-itn* = «Прекрасен в жизни Атон»).

³⁾ В этом можно непосредственно убедиться из сравнения фотографии со строкой 6 иероглифического текста (ср. рис. 42). Непосредственно перед знаком (т. е. справа от знака) ḥ , гиератическая форма которого лишь незначительно отличается от иероглифической (ср. рис. 24 на стр. 89), стоит знак t , тогда как слева внизу рядом с ḥ стоит интересующий нас знак, который слишком короток для ḥ . Знак этот имеет ближайшее сходство с гиератической формой знака $t \Delta$, который можно увидеть в конце строки 1 или же в конце строки 5 под

знаком nb ḥ , или же, еще лучше, в строке 5 непосредственно перед ḥ

в группе nn ḥ .

детерминативом $\odot$, а остатки детерминатива, которые еще можно разобрать в конце лакуны на папирусе, вряд ли подходят к этому иероглифу. Таким образом необходимо категорически отвергнуть дополнение *ltn*. Но, с другой стороны, трудно найти какое-нибудь из известных слов, которое дало бы возможность восполнить сохранившиеся остатки знаков. Струве прибег к такому приему. Знак внизу слева рядом с *i* он читает как $\ominus$ *r*; в самом деле, такое дополнение нельзя считать совершенно невозможным, хотя необходимо заметить, что *t* значительно лучше подходит, чем *r*. Знак слева от *i* он толкует как начало знака *n* , а детерминатив дополняет в иероглифе «яйца»; иными словами, он читает так, как это сделано на нашем рис. 42 в транскрипции строки 6 текста, причем перед детерминативом яйца поставлен еще другой детерминатив, именно детерминатив  камня, стоящий в тесной связи со словом *lnr*. Основной смысл этого слова *lnr* есть камень; в этом случае это слово, разумеется, пишется без детерминатива яйца. Но существует производное от этого слова, в котором встречается детерминатив яйца. Это производное слово встречается в мифологическом контексте (в так называемой «Книге мертвых») и там в действительности означает что-то вроде яйца. Поэтому Струве полагает, что «яйцо» — технический термин для шара.

Теперь вернемся к данным задачи. Во второй строке повторяется, как это принято в Египте, слово, обозначающее тему задачи, содержащуюся в заглавии (*nb.t*). Затем следуют слова (строка 2b) *m tp-r²*; это *tp-r²* есть известный нам математический термин, означающий в буквальном переводе приблизительно «впереди *pa*», т. е. «устье». Так, например, этим термином обозначается основание равнобедренного треугольника. Если поэтому здесь говорится об устье интересующего нас предмета, то становится чрезвычайно правдоподобным предположение Струве, что здесь речь идет о диаметре большого круга, служащего основанием полушария. До сих пор, таким образом, мы еще не встретили никаких существенных трудностей: они начинаются только при рассмотрении той грамматической связи, в которой стоит это слово. Оно находится между двумя предлогами. Перед ним стоит

m , а после него *r* $\ominus$. Частица *m* чрезвычайно часта в египетском языке. Первоначально это слово означало приблизительно «внутри». Отсюда развился ряд значений, именно «в», как во временном, так и в пространственном смысле, «под», «с», «при помощи» и т. д. Наиболее важную роль эта частица играет в так называемом «номинальном предложении», т. е. в предложении, построенном по принципу «А есть В», где А и В соответствуют нашему подлежащему и сказуемому. Обычной формой этой конструкции номинального предложения является конструкция с *m*, именно «А *m* В». В этом случае *m* выражает равенство обоих понятий. Поэтому в математических текстах *m* очень часто соответствует знаку $=$, например в конструкции: « $\frac{2}{3}$ его равно (*m*) 4». Но если, как мы видим, частица *m* имеет весьма различные значения, и поэтому ее очень трудно передать нашими языковыми

оборотами, то частица r , напротив, имеет очень простое значение «в направлении к», — «к».

Наконец, надо еще остановиться на последнем слове строки 3, именно на слове $\underline{d}$. Обычно это означает: «быть здоровым и невредимым» и т. п. По толкованию Струве величина $4\frac{1}{2}$ должна означать диаметр большого круга шара; поэтому он переводит « $4\frac{1}{2} m \underline{d}$ » через « $4\frac{1}{2}$ в целости и сохранности» и видит в этом выражение, обозначающее, что следует взять диаметр «максимального», а не какого угодно круга. Стоящую перед этим частицу r — «к» — и предложение $m tp-r^3$ он соединяет в одно выражение «с устьем по $4\frac{1}{2}$ » и толкует частицу r , которая в этой грамматической связи весьма необычна, как «по», т. е. как предлог, выражающий, что длина $4\frac{1}{2}$ есть результат измерения как в одном каком-нибудь направлении, так и в другом, ему перпендикулярном. Смысл его перевода мы могли бы обстоятельно передать так: «поверхность, имеющая вид корзины, устье которой в любом направлении $4\frac{1}{2}$, причем это устье должно быть максимальным».

Весь этот перевод условия задачи вызывает сомнения с грамматической стороны, но он во всяком случае гармонирует с толкованием нашей задачи как задачи нахождения поверхности полушария. Однако это толкование основано не на контексте, а, в сущности говоря, только на том обстоятельстве, что число $4\frac{1}{2}$ необходимо соединить со словом «устье» и что «устье» естественно должно означать «диаметр», а не радиус. Таким образом перевод Струве является естественным следствием его толкования вычислений на папирусе, основанного на отождествлении t и d .

Принципиально новую ситуацию создал Пит (Т. Е. Peet), допустив, что в текст вкралась ошибка. Он дополняет в начале строки 2b слова $n 4\frac{1}{2}$ и получает грамматически абсолютно безукоризненное построение, именно

$$\begin{array}{ll} nb.t & nb.t \\ \left[n 4\frac{1}{2} \right] m tp-r^3 & \left[в 4\frac{1}{2} \right] в устье \\ r 4\frac{1}{2} m \underline{d} & на 4\frac{1}{2} в \underline{d} \end{array}$$

В самом деле, грамматическая структура этих предложений абсолютно безукоризненна. $nb.t$ характеризуется при помощи двух параллельных заданий: $4\frac{1}{2} m tp-r^3$ и $4\frac{1}{2} m \underline{d}$, противопоставленных друг другу при помощи частицы r точь-в-точь так, как мы употребляем слово «на» (или знак $\times$) при заданиях размеров (например пластинка в 12 на 18 см). Первая заслуга этого толкования — упорядочение синтаксической структуры. Правда, оно основано на допущении ошиб-

ки писца. Но такое допущение можно оправдать, с одной стороны, тем, что пропуск n $4\frac{1}{2}$ легко объясняется повторением знака $4\frac{1}{2}$ в одном и том же предложении (наш текст. разумеется, переписывался неоднократно), а с другой — тем, что если не принять его, то получается почти невозможное синтаксическое построение. Поэтому с филологической стороны предложение Пита заслуживает решительного предпочтения.

Далее Пит и лакуну в конце строки 6а дополняет иначе, чем Струве. Мы видели уже, что наилучшим чтением сохранившихся здесь частей букв является $i \text{ } \text{||||} t \text{ } \text{||||}$. Пит дополняет: $ip.t \text{ } \text{||} \text{ } \text{||} \text{ } \text{||} \text{ } \text{||}$, что также прекрасно согласуется и с сохранившимися частями букв и с величиной лакуны.

Таким образом благодаря допущениям Пита мы получили по крайней мере правильное восстановление текста. Но это не разрешает еще вопроса о том, как толковать текст, получающийся в результате этого восстановления. До сих пор все наши рассуждения основывались на допущении того, что в условии дана только одна величина; при таком предположении ничего не оставалось, кроме альтернативы: диаметр и радиус или, что то же, шар или круг. Но теперь в условии фигурируют две величины: «устье» $d = 4\frac{1}{2}$ и величина $a = 4\frac{1}{2}$, называемая в тексте $\bar{d}$ (мы должны полагать, что в данной задаче $\bar{d}$ и a равны друг другу, так как это с необходимостью вытекает из дальнейших вычислений, уже нам известных). Величина $ip.r^2$, которую естественно толковать как диаметр $\bar{d}$, была, разумеется, использована для вычисления окружности; соответствующее вычисление может быть, вслед за Струве, передано формулой

$$\left(2d - \frac{1}{9} \cdot 2d\right) - \frac{1}{9} \left(2d - \frac{1}{9} \cdot 2d\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2d.$$

Но дальше в тексте производится еще раз умножение на $4\frac{1}{2}$. В противоположность прежнему толкованию Струве мы можем теперь учесть это число $4\frac{1}{2}$ как вторую данную величину, именно как величину a . Тогда окончательная формула представится так:

$$F = a \left(\frac{8}{9}\right)^2 2d \approx a \frac{d\pi}{2}.$$

Если толковать a и $\bar{d}$ как перпендикулярные друг другу направления, то здесь мы имеем дело с поверхностью, которую можно интерпретировать как боковую поверхность полуцилиндра с диаметром $\bar{d}$ и высотой a (рис. 43). Так и толкует нашу задачу Пит.

Но теперь, разумеется, надо разрешить еще вопрос о значении слов $nb.t$, $\bar{d}$ и $ip.t$. Пит считает, что предмет, изображенный на рис. 43,

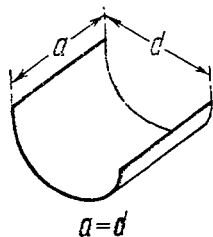


Рис. 43.

это что-то вроде корзины для ношения, а в $\bar{d}$ он видит новый, до сих пор неизвестный термин, обозначающий длину края корзины; $\bar{i}r.t$ он сближал с известной мерой для хлеба, носившей такое название. Я предложил несколько иное толкование, исходя из того, что единицами, в которых выражены размеры в этой задаче, должны быть, следуя общему правилу, локти; а при таком толковании «корзина» получит чрезмерно большие размеры. Поэтому мне кажется, что имеет кое-что за себя предположение, по которому здесь речь идет о вычислении поверхности (количестве потребного материала на покрытие)

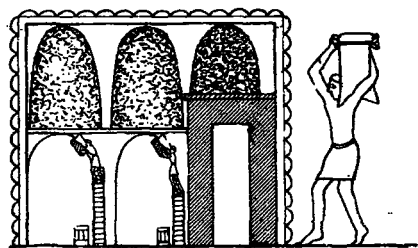


Рис. 44.

одного из тех куполообразных амбаров, которые известны нам по целому ряду египетских изображений (рис. 44). Взглянув на рис. 45 и 46, мы убедимся, что наше вычисление дает грубую, но с конструктивной стороны наиболее простую приближенную формулу. Получающиеся при этом размеры также вполне соответствуют фактическим размерам указанных сооружений.

Я остановился так подробно на вопросах толкования М 10, так как из этого разбора вытекает с чрезвычайной отчетливостью, какая масса трудностей возникает, как только нам приходится иметь дело с более или менее сложным пассажем в тексте. Не зная всех отмеченных здесь подробностей, мы не имеем права требовать, чтобы более

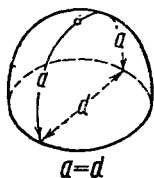


Рис. 45.

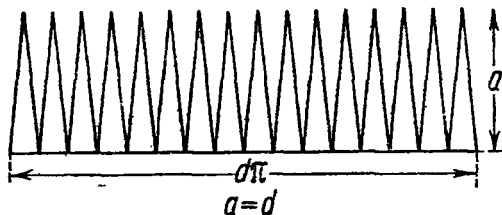
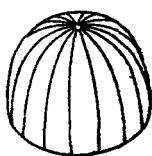


Рис. 46.

или менее серьезно считались с нашим взглядом по тому или иному вопросу, особенно в том случае, если он имеет серьезное значение для истории математики. А таково, например, допущение, что в М 10 содержится вычисление поверхности полушария. Только сопоставив между собой в отдельных подробностях толкования Струве и Пита, можно понять, на каком непрочном фундаменте покоятся некоторые утверждения из области истории, перешедшие в литературу как твердо установленные факты.

В случае М 10 я лично считаю реконструкцию текста, предложенную Питом, по которой даны две величины, значительно более вероятной. Но уже одного того факта, что дополнение Пита возможно,

достаточно для того, чтобы перестать считать теорию, по которой в нашей задаче речь идет о полусарии, сколько-нибудь доказанной. Другой вопрос — как толковать отдельные термины, в случае если мы принимаем интерпретацию Пита? Но это уже вопросы, которые не могут существенно видоизменить наш взгляд на египетскую математику; это — подробности, которые выходят из сферы вопросов, разбираемых здесь.

§ 3. ЕГИПЕТСКАЯ ТЕОРИЯ ДРОБЕЙ.

а) Алгоритм вспомогательных чисел.

Теперь мы снова перейдем к вопросам принципиального значения, поставленным нами в первых параграфах этой главы и относящимся к истории возникновения своеобразных методов, применявшихся в египетской математике при действиях над дробями. Для этого нам нужно, переходя к более подробной характеристике этих действий, осветить еще одну весьма существенную сторону.

В резком противоречии с неуклюжестью и примитивностью египетского учения о дробях стоит тот факт, что сравнительно сложные преобразования делаются, как кажется с первого взгляда, сразу, без промежуточных ступеней. Так, например, в R 30 констатируется, что при сложении двух сумм основных ¹⁾ дробей $\bar{3} + \bar{46} + \bar{138}$ и $\bar{5} + \bar{10} + \bar{230}$ получается 1. Естественно возникает вопрос, каким образом ухитрялись сразу производить такое сложение дробей с совершенно различными знаменателями. Ответ на этот вопрос дают, повидимому, вычисления вроде того, которое содержится в R 22. Здесь составляется выражение

$$\bar{3} + \bar{5} + \bar{10} + \bar{30} = 1,$$

но под числовыми знаками, написанными обыкновенной черной тушью, находятся еще красные числа ²⁾, именно:

$$\begin{array}{cccc} \bar{3} & + & \bar{5} & + & \bar{10} & + & \bar{30} & = & 1. \\ 20 & & 6 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Получается впечатление, что здесь содержится исчерпывающий ответ на наш вопрос о способе сложения дробей, так как красные цифры можно, не долго думая, истолковать как числители отдельных слагаемых, если за общий наименьший знаменатель взять 30:

$$\frac{20}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = 1.$$

Если бы это было так, то красные числа, которые мы в дальнейшем будем всегда называть *«вспомогательными числами»*, представляли бы

¹⁾ То-есть дробей с числителем 1. *Переводчик.*

²⁾ Мы их здесь передаем курсивом.; в тех случаях, когда красные числа будут обозначаться буквами, мы будем передавать их жирным курсивом. *Ред.*

собой лишь другой способ написания «неосновных» дробей, т. е. дробей с числителем не-единица, — способ, отличающийся от нашего только по внешнему виду. Но это допущение сразу же опровергается другими примерами. Следующий пример на сложение дробей (взятый из R 33)

$$(36 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}) + (\overline{28} + \overline{84}) = 37$$

$$3621 + \overline{3} \quad 1358 \quad 194 \quad 194 \quad 64 + \overline{3}$$

уже никак нельзя объяснить как приведение к общему наименьшему знаменателю. Это ясно не только из того, что таким общим наименьшим знаменателем должно было бы быть 84, а не 5432 (нашим вспомогательным числом соответствует знаменатель 5432): приведение к общему знаменателю может иметь смысл только в том случае, когда таким путем получаются в числителе целые числа, а это не имеет места в нашем случае. Наличие дробей во вспомогательных числах, обычное и в других случаях, делает невозможным толкование, по которому эти числа служат для нахождения общего знаменателя.

Здесь перед нами вопрос принципиального значения. Если бы пользование вспомогательными числами было действительно равнозначно приведению к общему знаменателю, то, по существу говоря, можно было бы констатировать существование в Египте самого общего понятия дроби. Поэтому, исследуя в частности алгоритм вспомогательных дробей, мы касаемся вопроса, имеющего решающее значение для оценки этой части догреческой математики. Уже то, что было сказано до сих пор, показывает, что мы можем сразу же дать на этот вопрос отрицательный ответ; мы вправе заявить, что в Египте не может быть еще речи о вычислении при помощи «числителя» и «знаменателя». Но мы подвергнем также обсуждению целый ряд явлений, которые дадут нам возможность понять положительную историческую роль вспомогательных чисел.

Прежде всего мы обратим внимание на оригинальный способ применения вспомогательных чисел, лишь раз указывающий на то, что при этом речь не может идти об общем наименьшем знаменателе. В R 14 мы находим следующее вычисление (умножение $\overline{28}$ на $1 + \overline{2} + 4$):

$\frac{1}{2}$	$\overline{28}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{4}$	$\overline{56}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{4}{4}$	$\overline{112}$	$\frac{4}{4}$
вместе	$\overline{16}$	

Если бы вспомогательные числа были числителями, получающимися после введения общего знаменателя, то сложение $\overline{28} + \overline{56} + \overline{112} = \overline{16}$ имело бы вид

$$\overline{28} + \overline{56} + \overline{112}$$

$$\frac{4}{4} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1}$$

а н

$$\frac{28}{1} + \frac{56}{2} + \frac{112}{4}$$

Тем не менее это явление можно объяснить, если только рассматривать пример вроде R 14 не изолированно от всего остального, но в целой группе примеров, связанных между собой по содержанию и представленных на приложенной таблице (стр. 158). Если мы, например, рассмотрим верхний ряд примеров в этой таблице, то убедимся, что вычисления в этих трех примерах, рассматриваемых как одно целое, получены одно из другого путем последовательных делений пополам. Правда, примеры R 11 и R 12 не содержат никаких вспомогательных чисел. Но если мы их дополним так, как это сделано на таблице в квадратных скобках, т. е. так, чтобы и они получались в каждом примере путем деления чисел в каждом предыдущем примере пополам, то вспомогательные числа в первом примере получают наиболее целесообразный вид, именно 1 при наименьшей дроби и 4 при наибольшей. Что эта реконструкция правильна, подтверждается на примере второго горизонтального ряда. Рассмотрим, например, группу примеров R 7, R 7b, R 10¹). Первая строка

$$\frac{4}{7} + \frac{28}{1}$$

равнозначна приведению к общему знаменателю 28. Во второй строке как черные, так и красные числа делятся пополам, и то же повторяется еще раз в третьей строке. Это вычисление мы переносим целиком в ближайший пример, являющийся следующим шагом, причем делим пополам как черные, так и красные числа.

Правда, это вычисление в тексте не сохранилось, зато сохранились следующий за ним и следующий еще далее за этим шагом шаг, причем все черные и красные числа еще раз делятся пополам. Аналогичным образом можно характеризовать и все остальные примеры нашей таблицы.

Уже из сказанного до сих пор ясно следующее: если взять, скажем, пример вроде R 15 (правый конец среднего ряда в нашей таблице) и рассматривать его самого по себе, то встречающиеся здесь сложные нагромождения дробей во вспомогательных числах произведут впечатление полной нелепицы, и никак не удастся понять их роли в вычислении. Но стоит обратить внимание на связь этих вычислений с задачами, помещенными слева, и прежде всего со схемой

$$\frac{4}{7} + \frac{28}{1}$$

данной в первой строке R 7, а также на необходимость видеть в подобных вычислениях в целом частный случай применения бинарной про-

¹) Кстати, здесь ясно видно, как изменились наши тексты в процессе переписки. Логический порядок, в котором даны примеры на нашей таблице, в подлиннике многократно нарушается, как это видно из номеров задач (например R 13 и R 14 менялись местами). Третий пример второго ряда в настоящее время совсем отсутствует и дополнен мной. Вместо этого предшествующий ему дан дважды (R 7 и R 7b; R 10 представляет собой только относящееся сюда же вычисление, содержащее ошибку).

Замечание. В примерах двух верхних рядов множат все время на $1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4}$, в нижнем ряду — на $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$.

R 11		R 12		R 14	
1	$\frac{7}{4}$ [4]	1	$\frac{14}{28}$ [2]	1	$\frac{28}{56}$ 1
$\frac{2}{4}$	$\frac{14}{28}$ [2]	$\frac{2}{4}$	$\frac{28}{56}$ [1]	$\frac{2}{4}$	$\frac{56}{112}$ $\frac{2}{4}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{28}{56}$ [1]	$\frac{4}{4}$	$\frac{56}{112}$ [2]	$\frac{4}{4}$	$\frac{112}{224}$ $\frac{4}{4}$
вместе $\frac{4}{4}$		вместе 8		вместе 16	

R 9		R 7, R 7b, R 10		R 18		R 15	
1	$\frac{2}{4}$ + 14 [14]	1	$\frac{4}{8}$ + 28 1	1	$\frac{16}{32}$ + 112 $\frac{4}{8}$	1	$\frac{32}{64}$ + 224 $\frac{8}{16}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$ + 28 [7]	$\frac{2}{4}$	$\frac{8}{16}$ + 56 $\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{32}{64}$ + 224 $\frac{8}{16}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{64}{128}$ + 448 $\frac{16}{32}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{8}{16}$ + 56 [2]	$\frac{4}{4}$	$\frac{16}{32}$ + 112 $\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{64}{128}$ + 448 $\frac{16}{32}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{128}{256}$ + 896 $\frac{32}{64}$
вместе $\frac{1}{2}$		вместе $\frac{2}{4}$		вместе $\frac{8}{16}$		вместе $\frac{16}{32}$	

R 16		R 17		R 8 ¹⁾		R 18		R 19		R 20	
1	$\frac{2}{4}$ [2]	1	$\frac{3}{6}$ [6]	1	$\frac{4}{8}$ 4 + 2	1	$\frac{6}{12}$ [3]	1	$\frac{12}{24}$ 1 + 2	1	$\frac{24}{48}$ 2 + 2
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$ [6]	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{12}$ + 18 [4]	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{12}$ 3	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{18}$ [2]	$\frac{3}{6}$	$\frac{18}{36}$ 1	$\frac{3}{6}$	$\frac{36}{72}$ 2
$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{12}$ [3]	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{18}$ [2]	$\frac{3}{6}$	$\frac{12}{24}$ 1 + 2	$\frac{3}{6}$	$\frac{18}{36}$ [1]	$\frac{3}{6}$	$\frac{36}{72}$ 2	3	$\frac{72}{144}$ 4
вместе 1		вместе $\frac{3}{6}$		вместе $\frac{2}{4}$		вместе 3		вместе 6		вместе 12	

1) Получена либо путем деления пополам чисел из R 16, либо путем сложения чисел из R 18 и R 19 ($2 = 3 + \frac{6}{6}$).

цедуры, — и сразу становятся ясными внутренние закономерности между числами. Поэтому мы приходим к следующему выводу: на некоторых начальных этапах обширных вычислений вспомогательные числа действительно играют роль, аналогичную приведению к общему знаменателю. Но затем, руководясь совершенно чуждой нам точкой зрения, эти числа подвергаются чисто схематическим изменениям, и в результате получаются выражения, имеющие совсем другой смысл, чем приведение к общему знаменателю. С чисто внешней стороны это наблюдение приводит нас к выводу, что, имея перед собой вычисления с маловразумительными группами вспомогательных чисел, прежде всего со вспомогательными числами, имеющими дробную часть, нам следует всегда пытаться, подвигаясь назад по бинарной схеме или по какой-нибудь другой схеме, принятой в египетской вычислительной технике, например по десятичной схеме, отыскать простые начальные вспомогательные числа, которые можно выразить схемой

$$\frac{1}{n} \quad n$$

$$n \quad 1$$

Таким образом эта схема взаимоотношений между дробями и вспомогательными числами по существу приводит к тому, что вспомогательные числа, по крайней мере в соответствующем исходном пункте ряда вычислений, применяются для приведения к общему знаменателю. Но они должны были играть еще и другую роль. Чтобы понять это, необходимо проследить во всех подробностях за каким-либо примером, приводящим к длинному ряду вычислений. Прделаем это на R 33. Требуется определить неизвестное, удовлетворяющее зависимости

$$x + \bar{3}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 37$$

(этот пример представляет собою одно из вычислений 'h', о которых мы говорили выше, на стр. 127 и сл.). Это уравнение приводится к задаче: разделить 37 на $(1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7})$. Применяя египетские правила деления, надо начать с умножения этого выражения на 2, еще на 2 и т. д. до тех пор, пока не придем к числу, при умножении которого на 2 получается результат, больший, чем 37. Проследим действия, содержащиеся в тексте. Первый шаг:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7} \\ 2 \quad 4 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} \end{array}$$

За этим переходом скрывается каноническое разложение чисел вида $\frac{2}{n}$, именно $\frac{2}{7} = \bar{4} + \bar{28}$.

В следующей строке читаем:

$$4 \quad 9 + \bar{6} + \bar{14}.$$

За этим скрывается приведение к каноническому виду $\bar{3} + \bar{2} = (\bar{2} + \bar{6}) + \bar{2} = 1 + \bar{6}$.

Следующая строка не нуждается в объяснениях:

$$8 \quad 18 + \overline{3} + \overline{7}$$

(здесь и вообще всюду применяется, как само собой разумеющееся, сокращение на 2). И, наконец, в последней строке читаем:

$$/ 16 \quad 36 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28},$$

где опять применено разложение $\frac{3}{7} = \overline{4} + \overline{28}$.

Мы пришли к концу удвоения, так как должны в результате получить всего только 37, а достигли уже числа, несколько большего, чем 36. Перенишем еще раз все вычисление, содержащееся в тексте, причем в последней строке отметим и вспомогательные числа, которые в тексте появляются впервые лишь здесь:

$$\begin{array}{rcll} 1 & 1 + \overline{3} + & \overline{2} & + \overline{7} \\ 2 & 4 + \overline{3} + & \overline{4} & + \overline{28} \\ 4 & 9 + \overline{6} + & \overline{14} & \\ 8 & 18 + \overline{3} + & \overline{7} & \\ / 16 & 36 + \overline{3} + & \overline{4} & + \overline{28} \\ & 28 + 10 + \overline{2} + 1 + \overline{2} = 40 \end{array}$$

Следуя нашему принципу дополнения, мы попытаемся найти начальные вспомогательные числа. Для этого нужно только постепенно подвигаться в обратном порядке, отправляясь от вспомогательных чисел последней строки и следя за тем, как они получаются друг из друга при последовательном удвоении соответственных чисел ¹⁾.

¹⁾ Для понимания этой чрезвычайно невразумительно построенной фразы необходимо обратиться к соответствующему исследованию того же автора «Arithmetik und Rechenstechnik der Ägypter», Q. S. B., 1930, стр. 334 (список литературы IV, 5), где в примечании 109 реконструкция Нейгебауера дана полностью:

$$\begin{array}{rcll} 1 & 1 + \overline{3} + & \overline{2} & + \overline{7} \\ & 28 & 21 & \overline{6} \\ 2 & 4 + \overline{3} + & \overline{4} & + \overline{28} \\ & 14 & 10 + \overline{2} & 1 + \overline{2} \\ 4 & 9 + \overline{6} + & \overline{14} & \\ & 7 & 3 & \\ 8 & 18 + \overline{3} + & \overline{7} & \\ & 14 & 6 & \\ 16 & 36 + \overline{3} + & \overline{4} & + \overline{28} \\ & 28 & 10 + \overline{2} & 1 + \overline{2} \end{array}$$

Таким образом, говоря о «последовательном удвоении», Нейгебауер выражается недостаточно ясно: вспомогательные числа по реконструкции Нейгебауера надо то умножать, то делить, руководствуясь соответствием $\overline{42}$ и поступая обратно тому, что происходит с основными числами. *Переводчик.*

Тогда мы сразу же получим для первой строки следующую схему вспомогательных чисел:

$$1 + \overline{3} + \overline{2} + \overline{7} \\ 42 + 28 + 21 + 6 = 97.$$

Таким образом наш принцип оправдался полностью, ибо смысл этой первой строки тот, что 42 есть общий наименьший знаменатель, полученный при приведении к одному знаменателю первой строки. Таким образом исходной схемой нашего вычисления служит

$$\begin{array}{r} 1 \quad 42 \\ \hline 42 \quad 1. \end{array}$$

Красные цифры означают, следовательно, не что иное, как число сорок вторых. Итак, образовав в последней строке сумму вспомогательных чисел, относящихся к каждому из дробных слагаемых, именно $28 + (10 + \overline{2}) + (1 + \overline{2}) = 40$, мы выразили то, что излишек сверх 36 равен 40 сорок вторых. В тексте же мы читаем: «Остаток 2». Это означает, во-первых, что путем умножения на 16 получилось 36 целых единиц плюс некоторая дробь и что, во-вторых, нужно получить 37 и, следовательно, эта дробь должна быть дополнена до единицы. Так как уже имеющаяся часть равнозначна 40 сорок вторых, то нехватает 2 сорок вторых. Теперь перед вычислением стоит задача, найти еще 2 сорок вторых для начальной строки. Но если всю начальную строку выразить во вспомогательных числах, т. е. в сорок вторых, то она, как мы видели, получит значение 97. Таким образом из

$$\begin{array}{r} 1 \quad 97 \\ \hline 97 \quad 1 \end{array}$$

необходимо получить вспомогательное число 2. Это означает только то, что надо удвоить 97. Это удвоение производится по каноническим правилам египетского учения о дробях, согласно которому $2 : 97$ равнозначно сумме дробей $\overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$. Это мы и читаем в тексте. В нем написано:

$$\begin{array}{r} \overline{97} \qquad \qquad \overline{42} \quad 1 \\ \hline \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} \quad \overline{21} \quad 2. \end{array}$$

Таким путем получается результат:

$$x = 16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776} \quad 1).$$

¹⁾ В качестве второго примера мы проанализируем ход вычисления, приведенного нами уже выше на стр. 131 и сл., именно деления 2 на $(1 + \overline{3} + \overline{4})$. Мы начнем с

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 + \overline{3} + \overline{4} \\ \hline 12 + 4 + 3 = 19. \end{array}$$

Из приведенного здесь хода вычисления видно, что роль вспомогательных чисел была совершенно иной, чем та, которая выражается словами «приведение к общему знаменателю».

Если бы мы решили уравнение

$$x + \bar{3}x + \bar{2}x + \bar{7}x = 37$$

и привели бы его в действительности к общему знаменателю 42, то получилось бы

$$\frac{97}{42}x = 37.$$

Чтобы получить x из этого выражения, понадобилось бы 37 помножить на 42 и затем обычным путем разделить на 97. Все это — дей-

Установленное соответствие 1 12 наводит на применение ряда, начинающегося с $\bar{3}$. Поэтому мы сразу же берем утроенные вспомогательные числа, т. е. 1 36, так как таким путем мы избежим во вспомогательных числах дробей. Мы пишем:

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 + \bar{3} + \bar{4} & 57 \\ / \bar{3} & 1 + \bar{18} & 38 \\ / \bar{3} & \bar{2} + \bar{36} & 19 \\ / \bar{6} & \bar{4} + \bar{72} & 9 + \bar{2} \end{array}$$

(см. стр. 132). Несмотря на то, что мы уже встретили дробное вспомогательное число (получающееся из сложения вспомогательных чисел, соответствующих 1 и $\bar{6}$. *Переводчик*), сумма $66 + \bar{2}$ еще слишком мала, так как 2 соответствует 72. Мы должны поэтому продолжать вычисление, удвоив все вспомогательные числа для получения зависимости 1 72. Но, как показывает следующий шаг вычисления, и этого недостаточно, так что приходится еще раз удвоить вспомогательные числа, положив в основу 1 144. Тогда получим:

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 + \bar{3} + \bar{4} & 228 \\ / \bar{3} & 1 + \bar{18} & 152 \\ / \bar{3} & \bar{2} + \bar{36} & 76 \\ / \bar{6} & \bar{4} + \bar{72} & 38 \\ / \bar{12} & \bar{8} + \bar{144} & 19 \end{array}$$

с суммой вспомогательных чисел 285, которая от 2 288 отличается только на $3 = 1 + 2$. Мы дополняем эту недостачу, исходя непосредственно из первой строки и установленного соответствия 1 144, так:

$$\begin{array}{rcl} / \bar{228} & 1 & \bar{144} \\ / \bar{114} & 2 & \bar{72}, \end{array}$$

и таким образом получаем опять результат, данный на стр. 132. Наша реконструкция вполне подтверждается текстом, в котором рядом с вычислением, данным на стр. 132, еще выписаны в том же порядке, как здесь, полученные нами вспомогательные числа.

ствия, хорошо засвидетельствованные для египетской вычислительной техники. Но в разбираемом примере эти действия не производятся. Наоборот, в тексте 37 делится непосредственно описанным выше путем на $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, т. е. на коэффициенты при x ; введение вспомогательных чисел служит лишь для того, чтобы проконтролировать отдельные шаги вычислительной процедуры и чтобы показать, какие еще шаги необходимо совершить, чтобы вполне достичь нужного результата 37. Таким образом, хотя с математической точки зрения введение вспомогательных чисел равносильно приведению к общему знаменателю, однако в египетской вычислительной технике оно играет лишь роль индикатора, отмечающего отдельные шаги обычной процедуры, основанной на сложении. Подобно тому как при обычных умножении и делении стоящие слева числа («характеристики») 1, 2, 4, ... или 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... сопровождают отдельные шаги вычисления, так и красные вспомогательные числа в каждом отдельном выражении служат для подсчета отношения появляющихся здесь величин друг к другу. Таким образом они вполне соответствуют первобытному наивному представлению, по которому отдельные дробные части присчитываются друг к другу, и таким образом с полной отчетливостью показывают, как далеки были древние египтяне от введения единого символа $\frac{a}{b}$ для b -х частей, взятых в количестве a .

Из всего сказанного должно стать ясным, что в те времена и в голову не приходило видеть в кратном основпой дроби единое и цельное числовое понятие; в действительности мы в египетских вычислениях все время имеем дело с паивным представлением о количестве предметов, которые присчитывают друг к другу и делят по способу, представляющему точную копию со способа счета с целыми числами. Тот, кто (как это сплошь и рядом бывает) наряду с бинарной процедурой, наряду с разбиением удвоенной основной дроби на сумму основных дробей, наряду со всеми этими приемами, основанными только на складывании, на присчитывании, — все еще допускает существование какого-то таинственного исчисления «неосновных дробей» и думает, что весь недостаток египетской математики состоял лишь в том, что ей не доставало подходящей символики, — тот не понял и не усвоил себе внутреннего единства египетской вычислительной техники.

К сказанному выше надо сделать еще одно существенное дополнение. Мы убедились, что основная роль вспомогательных чисел состоит в том, что они функционируют как контролирующие органы в более сложных вычислениях, т. е. они указывают на тот этап, на котором находится вычисление, и на расстояние, которое осталось еще пройти до желаемого результата. Для этого необходимо иметь возможность постоянно сравнивать между собой получающиеся части единицы. Именно этой цели и служит описанный выше способ введения вспомогательных чисел. Но эта задача стоит перед вычислением только в том случае, когда выражения, встречающиеся в вычислении, слишком сложны, т. е. не отличаются непосредственной «легкой обозримостью». Понятие «легкой обозримости» вычислений с дробями является парал-

R31 $ \begin{aligned} &4 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28} \\ &\quad 1 + \overline{2} \\ &+ 9 + \overline{6} \quad + \overline{14} \\ &\quad 3 \\ &+ 18 + \overline{3} \quad + \overline{7} \\ &\quad 6 \\ &+ \overline{4} + \overline{6} + \overline{8} + \overline{28} \\ &\quad 5 + \overline{4} \quad 1 + \overline{2} \end{aligned} $	R32 $ \begin{aligned} &1 + 6 + \overline{12} \quad + \overline{114} + \overline{228} \\ &\quad 76 \quad 8 \quad 4 \\ &+ \overline{3} + \overline{18} \quad + \overline{36} + \overline{342} \quad + \overline{684} \\ &\quad 50 + \overline{3} \quad 25 + \overline{3} \quad 2 + \overline{3} \quad 1 + \overline{3} \\ &+ \overline{4} + \overline{24} \quad + \overline{48} + \overline{456} \quad + \overline{912} \\ &\quad 38 \quad 19 \quad 2 \quad 1 \end{aligned} $
R34 $ \begin{aligned} &5 + \overline{2} + \overline{7} + \overline{14} \\ &\quad 8 \quad 4 \\ &2 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{14} + \overline{28} \\ &\quad 4 \quad 2 \\ &1 + \overline{4} + \overline{8} + \overline{28} + \overline{56} \\ &\quad 2 \quad 1 \end{aligned} $	R36 $ \begin{aligned} &\overline{4} + \overline{53} + \overline{106} + \overline{212} \\ &\quad 20 \quad 10 \quad 5 \\ &+ \overline{2} + \overline{30} + \overline{318} + \overline{795} + \overline{53} + \overline{106} \\ &\quad 35 + \overline{3} \quad 3 + \overline{3} \quad 1 + \overline{3} \quad 20 \quad 10 \\ &\quad + \overline{12} + \overline{159} + \overline{318} + \overline{636} \\ &\quad 88 + \overline{3} \quad 6 + \overline{3} \quad 3 + \overline{3} \quad 1 + \overline{3} \\ &\quad + \overline{20} + \overline{265} + \overline{530} + \overline{1060} \\ &\quad 53 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \end{aligned} $
R37 $ \begin{aligned} &\overline{2} + \overline{4} + \overline{8} + \overline{72} + \overline{16} + \overline{32} + \overline{64} + \overline{576} \\ &\quad 8 \quad 36 \quad 18 \quad 9 \quad 1 \\ &\overline{2} + \overline{4} + \overline{32} + \overline{16} + \overline{12} + \overline{96} + \overline{36} + \overline{288} + \overline{36} + \overline{288} \\ &\quad 9 \quad 18 \quad 21 \quad 3 \quad 8 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \end{aligned} $	R38 $ 319 + \overline{3} + \overline{11} + \overline{11} + \overline{22} + \overline{22} + \overline{33} + \overline{66} + \overline{66} $ 6 6 3 3 3 2 1 1

лелью к делению дробей на «натуральные дроби» и «алгоритмические дроби», о которых мы говорили выше. Говоря об общих способах выражения чисел при помощи языка и письма, мы констатировали выше неоднородность ряда чисел и ряда дробей, поэтому следует ожидать, что то же деление идет и дальше и распространяется также на вычислительную процедуру. Специальный алгоритм — особая техническая процедура, вроде приписывания вспомогательных чисел, — излишен в случае таких дробей, которые являются знакомыми индивидуальностями, имеющими простые и легко обозримые отношения друг к другу. Так обстоит дело с натуральными дробями. Этот алгоритм становится необходимым только в той части вычисления, которая обязательно приводит к результату лишь при применении определенной вычислительной схемы; эта часть лежит уже вне сферы натуральных дробей. Наши тексты вполне подтверждают эту реконструкцию. Приложенная таблица показывает с полной отчетливостью, что как раз дроби $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{8}$ и $\bar{3}$, $\bar{3}$, $\bar{6}$ не сопровождаются вспомогательными числами. Здесь, как и во всех других случаях, египетская математика потому особенно поучительна, что она даже на стадии своего высшего развития позволяет еще опознать те основы из области наглядных представлений, на которых она базируется в последнем счете. Первоначальные основы были точно такими же и в Вавилоне. Но изменения, приведшие к постепенному возникновению алгоритма, внесли во всю вавилонскую вычислительную технику гораздо более глубокие изменения и придали ей гораздо более цельный и стройный вид, чем в Египте; следы первоначальной фазы развития стерлись совершенно.

б) Структура таблицы величин $\frac{2}{n}$.

Сделанные нами до сих пор выводы относительно египетского учения о дробях можно свести к следующим основным положениям:

1. Необходимо иметь в виду, что действия с целыми числами сводятся к простому удвоению; с другой стороны, существовало правило, которое мы называли «постулатом основных дробей» и которое сводилось к тому, что какие бы то ни было действия можно производить только с основными дробями, т. е. с дробями, имеющими в числителе единицу. Поэтому возникает лишь одна задача: разложить дроби вида $\frac{2}{n}$ на основные дроби. Тот способ решения этой задачи, который засвидетельствован в текстах, носит абсолютно определенный и неизменный характер, а результаты этих разложений в их совокупности образуют «таблицу величин $\frac{2}{n}$ ».

2. Принципиальное деление всей области дробей на «натуральные» и «алгоритмические» простирается и на вычислительную технику, выражаясь в различном подходе к «легко обозримым» вычислениям и к вычислениям, требующим применения алгоритма вспомогательных чисел.

3. Бинарная процедура в области целых чисел, наряду с чередованием основных и дополнительных дробей, приводит к двойной методике вычисления дробей: именно к оперированию как с чисто бинарным рядом половинных дробей (ряд, начинающийся с $\frac{1}{2}$), так и к оперированию с рядом, начинающимся с $\frac{2}{3}$ ($\bar{3}$).

Практически наиболее важным инструментом всей этой вычислительной техники является таблица величин $\frac{2}{n}$. В то время как другие описанные здесь особенности вполне понятны во всем их историческом развитии, таблица величин $\frac{2}{n}$ в отношении своей структуры не может быть понята непосредственно. Прежде всего возникают два вопроса. Первый вопрос: раз уже постулат основных дробей и бинарная процедура требуют, чтобы дробь $\frac{2}{n}$ была представляема как сумма основных дробей, то следовало бы скорее всего ожидать тривиального разложения $\frac{2}{n} = \bar{n} + \bar{n}$. Но как раз такое разложение во всех текстах абсолютно исключено. Если же отказаться от такого разложения, то задача оказывается имеющей произвольное число решений. Отсюда возникает второй вопрос: почему ни в засвидетельствованной в тексте таблице величин $\frac{2}{n}$, ни во всех примерах ее применения нет никаких следов этой многозначности? Почему для любого n есть только один, вполне определенный способ разложения, который носит характер канонического? Ответ на этот второй вопрос естественно стоит в теснейшей связи с задачей выяснения истории возникновения этих разложений, так как, очевидно, такого рода принцип выбора может быть обоснован не математически, а только исторически.

Ответ на первый вопрос о причине запрещения разложения $\bar{n} + \bar{n}$ получается, в сущности говоря, почти непосредственно. Стоит только подумать, что было бы, если бы этого запрещения не существовало. Египетская вычислительная техника зиждется на бинарной процедуре; поэтому, чтобы, например, уятерить какую-либо основную дробь, скажем $\frac{1}{11}$, пришлось бы поступать так:

$$\begin{array}{r} \nearrow 1 \quad \overline{11} \\ 2 \quad \overline{11} \quad \overline{11} \\ \nearrow 4 \quad \overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \\ \text{вместе} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11} \quad \overline{11}. \end{array}$$

Результатом всякого умножения основной дроби явилось бы поэтому приписывание основной дроби к самой себе (приписывание во всех античных цифровых системах означает сложение) столько раз, сколько раз ее требовалось взять. Таким образом получается только, если можно так выразиться, определение понятия умножения; никак не может получиться новый в вычислительном смысле и пригодный

для дальнейших вычислений результатов. Теперь сделаем ту процедуру, которая основана на канонических разложениях величин $\frac{2}{n}$. Тогда наше вычисление получит следующий вид:

$$\begin{array}{rcl} & \nearrow 1 & \overline{11} \\ & 2 & \overline{6} + \overline{66} \\ & \nearrow 4 & \overline{3} + \overline{33} \\ \text{вместе} & & 3 + \overline{11} + \overline{33}. \end{array}$$

Если нужно производить дальнейшие вычисления с этим выражением, то снова и снова для отдельных звеньев этих вычислений приходится применять правила таблицы величин $\frac{2}{n}$. Как видно хотя бы из нашего примера, опыт, приобретенный в действиях над числами, содержащимися в наших текстах¹⁾, показывает, что при этом очень часто число членов в такой сумме не увеличивается, так как знаменатель содержит множитель 2^2), а в этих случаях числитель и знаменатель сокращаются непосредственно (ср. переход от 2 к 4 в нашем примере).

Необходимо здесь же обратить внимание на то, что органической причиной появления такого рода правила не были практические соображения, вроде тех, которыми мы начали эту главу; само собой разумеется, в действительности здесь не может быть речи о произвольно надуманном правиле действий с дробями. Это явление возникло в органической связи со структурой понятия числа; действительность его могла усиливаться благодаря его практическому удобству, и это же практическое удобство, связанное с указанной процедурой, могло быть причиной того, что оно не вымерло и сохранилось. Действительно, все эти процессы необходимо осмыслить и с т о р и ч е с к и. Как из изучения языкового материала, так и из процессов, игравших существенную роль в деле возникновения десятичной системы, мы могли уже неоднократно убедиться в том, что наше формальное разделение чисел на целые числа и дроби нисколько не отражает положения вещей, возникшего в ходе исторического развития. Для понимания важнейших сторон в развитии догреческой математики решающее значение имеет тот факт, что чисто индивидуальный характер понятий дробей еще совершенно ясен: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ не представляют собой понятий,

¹⁾ Необходимо здесь определенно подчеркнуть, что притти к действительному пониманию действий над египетскими дробями можно только после того, как мы научимся сами производить вычисления, применяя исключительно египетские методы работы. Тогда мы скоро почувствуем, каким внутренним единством отличается вся эта вычислительная техника и как нелепо пытаться видеть в ней что-то вроде неуклюжей маскировки нашей системы счета.

²⁾ Причина этого явления скоро станет нам понятна: оно в последнем счете объясняется бинарной процедурой, — той бинарной процедурой, которая лежит в основе совершенно определенного выбора основных дробей для таблицы величин $\frac{2}{n}$ (см. ниже стр. 177 и сл.).

выведенных из целых чисел, исходя из чисто математических соображений; это, если можно так выразиться, качества вещей, а не количества. В процессе естественного развития никогда не могли появиться пелешые «определения» вроде тех, которые можно еще до наших дней найти в школьных учебниках, как, например, что дроби — это обозначения «невыполненных делений»; эти определения — продукт бесплодного умствования людей, которые хотя и учились действиям над рациональными числами в их окончательно сложившемся виде, но никогда не могли проникнуть в их сущность. В историческом развитии постепенно возникла определенная группа понятий, относящихся к дробям; все более прогрессирующая алгорифмизация включает их постепенно в сферу систематического счета. Понятно, что вслед за этим возникает необходимость образовать определенные количества этих индивидуальностей, совершенно так же, как образуют определенные количества десятков или сотен. Первобытно-наглядное ядро всех понятий числа и прежде всего всех понятий дроби, еще неразрывно спаянных с метрологическими фактами, является на первых порах областью равноправных математических индивидуальностей, где еще отсутствует схематическое установление зависимостей при помощи какого-либо вычислительного алгорифма, присоединяющего, скажем, дроби к целым числам как производные понятия. Но при практическом применении этих понятий, особенно понятий мер, вычисляющий произвольно приучается к пониманию и использованию этих взаимоотношений, как, например, того факта, что некоторые дробные части мер можно дополнить до других таких частей или до целых единиц. Само собой разумеется, что никогда не могло составлять труда представить себе количество в семь пятых так же, как представляли себе семь десятков или семь предметов, подлежащих счету. Но никогда во всей древности никому не приходило в голову видеть в такого рода количестве в семь пятых *о д н о* цельное числовое понятие, именно рациональное число $\frac{7}{5}$. Даже греческая математика не сделала этого шага, хотя она и очень приблизилась к нему в так называемом «учении о пропорциях». Возможность сделать такой шаг стоит в теснейшей связи с возникновением единой с и м в о л и к и для числовых понятий вообще. Это происходит либо тем путем, что решение какой-либо численной задачи принципиально обозначается *о д н о й* буквой, либо тем путем, что рациональные числа обозначаются как точки на отрезке. Вся античная математика стояла очень далеко от этих обоих символических методов, — нечего и говорить уже о действительно математически безупречном определении понятия рационального числа вообще. Поэтому, с исторической точки зрения, пелешо даже ставить вопрос о том, известно ли было египтянам «понятие» неосновной дроби или нет; то, что по этому вопросу исписана бездна бумаги, еще не говорит за его правомерность. Самое появление в свет такой литературы имеет причиной веру в то, что достаточно сформулировать вопрос так, чтобы на него можно было ответить «да» или «нет», и уже на него можно будет ответить. При этом упускают из виду, что можно ставить и такие вопросы, которые вообще не имеют

ничего общего с действительным положением вещей. Например можно было бы представить себе, что на вопрос: «Было ли египтянам и было ли вавилонянам уже известно понятие основной дроби или нет?» следует ответить для первой части «нет», для второй—«да». Но и то и другое одинаково неверно. В обеих этих культурах развились понятия количества, как и во всякой другой культуре, дошедшей вообще до стадии систематического счета. В обеих этих культурах развились понятия дробей, первоначально непосредственно примыкавшие к естественно возникшим мерам длины, веса и т. п. В Египте, как и в Вавилоне, возникла наконец потребность в настоящем счете и счетной технике, и только по внешней форме обе эти системы постепенно пришли к совершенно различным возможностям, каковы египетское исчисление дробей, с одной стороны, и развитие шестидесятеричных дробей,—с другой. В третьей главе мы подробно говорили о том, что и шестидесятеричная система, существеннейшим признаком которой является ее позиционный характер, возникла лишь постепенно из различных ступеней количеств, связанных между собой определенным отношением, и следили за тем, как дроби высших ступеней оказываются целочисленными кратными низших ступеней; мы показали там также, что только процесс постепенного сглаживания является причиной того, что отсюда развивается символика, позволяющая в силу своей внутренней структуры применять к действиям над дробями правила действий над целыми числами, именно позиционное написание. И в Египте положение вещей не было существенно иным, хотя внешняя картина, повидимому, и противоречит этому. И в Египте внутренняя последовательность всей вычислительной техники значительно больше, чем это может казаться на первый взгляд. Разница только в том, что в Египте процесс осложняется еще рядом первобытнейших комплексов представлений, примешивающихся сюда еще на последней стадии развития системы, тогда как в Вавилонии первоначальные исходные точки развития постепенно все более отступают на задний план, уступая место единому, выросшему из метрологии, позиционному обозначению. Здесь мы имеем дело с противоположностью, чрезвычайно интересной в историческом отношении. Мы видели, что шестидесятеричная структура становится понятной, если обратить внимание на то, что процесс алгорифмизации в области метрологии начинается на очень ранней стадии, именно в ту эпоху, когда, с одной стороны, область десятичной структуры кончалась уже на $10 \cdot 10$, а с другой,—и область натуральных дробей еще не вышла за пределы крайней ограниченной группы, именно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. В Египте положение вещей отличается в этом отношении лишь очень немногим. Первоначальные области здесь как раз те же, именно десятичная структура и натуральные дроби. Но вычислительная техника в Египте захватывает в равной мере обе области: здесь последовательное деление пополам применяется уже к указанной выше ограниченной области $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$; благодаря этому к области «натуральных» дробей постепенно присоединяются также первые дроби рядов, начинающихся

с $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$, и их соединения уже рассматриваются как «легко обозримые». Аналогичным же путем и в области целых чисел развивается процедура удвоения; как мы видели, она лишь незначительно меняется под влиянием десятичной процедуры увеличения в десять раз или деления пополам полученных таким образом чисел. Таким образом, сравнивая египетские и вавилонские правила действий над дробями, мы обнаруживаем весьма замечательное и поучительное явление. С исторической точки зрения, вавилонская система счисления в своей основе примитивнее египетской. Для вавилонской системы, как мы видели, характерно то, что ей первоначально вовсе чужды действия над дробями; она оперирует только с действиями над ограниченной десятичной группой целых чисел, простое повторение которых (при отсутствии сквозной десятичной систематики) приводит к позиционному способу написания. Только благодаря этому непрочному сближению отдельных групп числа одной группы могли рассматриваться как дробные части соседней высшей группы. Вследствие этого «исчисление дробей» стало, само собой, частью некоторой позиции символики; это явилось единственной и, так сказать, случайной причиной того, что вавилонская математика обошлась без такого кропотливого дела как специальные «правила действий над дробями». С математической точки зрения, египетская процедура много последовательней. Она основана на распространении счетных процедур из области действий над целыми числами на область дробей и представляет собой действительно попытку придать этим методам возможно более широкое распространение. Мы еще проследим в подробностях, как это распространение бинарной вычислительной процедуры, основанной на сложении, повлияло на область натуральных дробей и на ее расширение в область алгоритмических дробей.

Мы увидим, что излишние длинноты, присущие египетским правилам действий над дробями, представляют собой естественный результат той последовательности, с которой вычислительная техника, еще весьма «примитивная», была распространена на область дробей, именно получение окончательного результата, как совокупности, путем сложения. С одной из форм такого перепесения мы уже познакомились — это учет действий над дробями при помощи «вспомогательных чисел», применяемый в тех случаях, когда зависимости между дробями перестают быть «непосредственно легко обозримыми».

Если мы теперь остановимся на принципах составления таблиц $\frac{2}{n}$, то увидим, что здесь прежде всего играет роль другая сторона счета с целыми числами, именно бинарная процедура. Поэтому целью наших ближайших рассуждений будет показать, что даже сложный аппарат египетских дробей возник естественным путем в историческом процессе, будучи внутренне цельным и единым, и что с точки зрения его исходных понятий его развитие можно считать вполне аналогичным развитию вавилонской математики; в самом деле, и здесь и там отличительной чертой является постепенное расширение методов, развившихся в области целых чисел, т. е. естественного счета.

n	$\frac{2}{n}$	$1 + a^1)$	n	$\frac{2}{n}$	$1 + a^1)$
3	$\overline{2+6}$	$1+\overline{2}$	53	$\overline{30+318+795}$	$1+\overline{3+10}$
5	$\overline{3+15}$	$1+\overline{3}$	55	$\overline{30+330}$	$1+\overline{3+6}$
7	$\overline{4+28}$	$1+\overline{2+4}$	57	$\overline{38+114}$	$1+\overline{2}$
9	$\overline{6+18}$	$1+\overline{2}$	59	$\overline{36+236+531}$	$1+\overline{2+12+18}$
11	$\overline{6+66}$	$1+\overline{3+6}$	61	$\overline{40+244+488+610}$	$1+\overline{2+40}$
13	$\overline{8+52+104}$	$1+\overline{2+8}$	63	$\overline{42+126}$	$1+\overline{2}$
15	$\overline{10+30}$	$1+\overline{2}$	65	$\overline{39+195}$	$1+\overline{3}$
17	$\overline{12+51+68}$	$1+\overline{3+12}$	67	$\overline{40+825+736}$	$1+\overline{2+8+20}$
19	$\overline{12+76+114}$	$1+\overline{2+12}$	69	$\overline{46+138}$	$1+\overline{2}$
21	$\overline{14+42}$	$1+\overline{2}$	71	$\overline{40+568+710}$	$1+\overline{2+4+40}$
23	$\overline{12+276}$	$1+\overline{3+4}$	73	$\overline{60+219+292+365}$	$1+\overline{6+20}$
25	$\overline{15+75}$	$1+\overline{3}$	75	$\overline{50+150}$	$1+\overline{2}$
27	$\overline{18+54}$	$1+\overline{2}$	77	$\overline{44+308}$	$1+\overline{2+4}$
29	$\overline{24+58+174+232}$	$1+\overline{6+24}$	79	$\overline{60+237+316+790}$	$1+\overline{4+15}$
31	$\overline{20+124+155}$	$1+\overline{2+20}$	81	$\overline{54+162}$	$1+\overline{2}$
33	$\overline{22+66}$	$1+\overline{2}$	83	$\overline{60+332+415+498}$	$1+\overline{3+20}$
35	$\overline{30+42}$	$1+\overline{6}$	85	$\overline{51+255}$	$1+\overline{3}$
37	$\overline{24+111+296}$	$1+\overline{2+24}$	87	$\overline{58+174}$	$1+\overline{2}$
39	$\overline{26+78}$	$1+\overline{2}$	89	$\overline{60+356+534+890}$	$1+\overline{3+10+20}$
41	$\overline{24+246+328}$	$1+\overline{3+24}$	91	$\overline{70+130}$	$1+\overline{5+10}$
43	$\overline{42+86+129+301}$	$1+\overline{42}$	93	$\overline{62+186}$	$1+\overline{2}$
45	$\overline{30+90}$	$1+\overline{2}$	95	$\overline{60+380+570}$	$1+\overline{2+12}$
47	$\overline{30+141+470}$	$1+\overline{2+15}$	97	$\overline{56+679+776}$	$1+\overline{2+8+14+28}$
49	$\overline{28+196}$	$1+\overline{2+4}$	99	$\overline{66+198}$	$1+\overline{2}$
51	$\overline{34+102}$	$1+\overline{2}$	101	$\overline{101+202+303+606}$	1

¹⁾ Этого столбца в тексте нет (см. стр. 175 и сл.).

О пресловутых «понятиях» основных дробей или смешанных дробей ни в египетской, ни в вавилонской арифметике дробей не может быть и речи.

Теперь мы перейдем к истории возникновения таблицы величин $\frac{2}{n}$. Таблица известных нам разложений величин $\frac{2}{n}$ дана на прилагаемой схеме. Она взята из первого раздела текста R. Части ее сохранились и в других текстах. Важнее всего то, что эти и только эти разложения применяются во всех примерах дошедших до нас египетских математических текстов и фрагментов текстов. Нашей целью будет осмыслить эти разложения исключительно с точки зрения вопроса об образовании понятий и вычислительных методов. Однако мы ограничимся лишь изложением основных принципов такого объяснения. Обо всем действительно существенном будет при этом сказано. По вопросу об отдельных подробностях отсылаю читателя к моей работе в QSB 1, стр. 301 и сл. (список литературы IV, 5) и к указанной там литературе.

Отправной точкой для нас послужит маленький лондонский фрагмент, который содержит целый ряд зависимостей из области действий над дробями, но без всякого сопровождающего примеры комментария. Среди этих зависимостей прежде всего есть тривиальные:

$$\overline{6} + \overline{6} = \overline{3}, \quad \overline{6} + \overline{6} + \overline{6} = \overline{2}, \quad \overline{3} + \overline{3} = \overline{3}.$$

Перед нами самоочевидные, полученные путем одних только сложений зависимости между натуральными дробями. Из двух первых дробей получается непосредственно, что

$$\overline{3} + \overline{6} = \overline{2},$$

а из этой зависимости вместе с третьей — что

$$\overline{2} + \overline{6} = \overline{3}.$$

Эти обе зависимости имеют огромное значение для всей египетской арифметики дробей. Дело не только в том, что в вычислениях они встречаются на каждом шагу (в цитированных нами примерах они также уже встретились, ср. выше стр. 159), — они представляют собой мост, связывающий друг с другом ряд, начинающийся с $\frac{1}{2}$, и ряд, начинающийся с $\frac{2}{3}$. Я уже неоднократно подчеркивал, насколько важно принципиально уяснить себе то обстоятельство, что задолго до появления какой бы то ни было систематической вычислительной техники уже существовали индивидуальные понятия дроби, к которым в ходе исторического развития примыкают дроби алгоритмические. Здесь перед нами как раз тот пункт, в котором процедура счета связывает дроби между собой, причем это можно наглядным образом непосредственно доказать. Мы сейчас увидим, что зависимость

$$\overline{3} = \overline{2} + \overline{6}$$

послужила прототипом для важной и первой группы разложений величин $\frac{2}{n}$ ¹⁾.

Разбираемый текст содержит далее целый ряд вычислений, данных в следующей схеме:

$$\begin{array}{ll}
 \overline{3} + \overline{6} = \overline{2} & \overline{2} + \overline{3} + \overline{6} = \overline{1} \\
 \overline{6} + \overline{12} = \overline{4} & \\
 \overline{9} + \overline{18} = \overline{6} & \overline{6} + \overline{9} + \overline{18} = \overline{3} \\
 \overline{12} + \overline{24} = \overline{8} & \\
 \overline{15} + \overline{30} = \overline{10} & \overline{10} + \overline{15} + \overline{30} = \overline{5} \\
 \overline{18} + \overline{36} = \overline{12} & \\
 \overline{21} + \overline{42} = \overline{14} & \overline{14} + \overline{21} + \overline{42} = \overline{7} \\
 \overline{24} + \overline{48} = \overline{16} & \\
 \overline{27} + \overline{54} = \overline{18} & \overline{18} + \overline{27} + \overline{54} = \overline{9} \\
 \overline{30} + \overline{60} = \overline{20} & \\
 \overline{33} + \overline{66} = \overline{22} & \overline{22} + \overline{33} + \overline{66} = \overline{11}
 \end{array}$$

Эти зависимости показывают с полной ясностью, какова была процедура их получения. Каждая строка получается из предыдущей

¹⁾ В литературе появилось оригинальное «возражение» против моей трактовки истории возникновения таблицы величин $\frac{2}{n}$. Мне ставили на вид, что в то время, в которое возникли наши тексты, уже не могло быть речи об образовании столь примитивных понятий, как те, которые являются исходным пунктом моего объяснения. Чтобы ликвидировать такого рода недоразумения, я должен подчеркнуть, что мне никогда не приходило в голову допускать, что содержащаяся в R таблица величин $\frac{2}{n}$ была вычислена в то время (или хотя бы в основных чертах в то время), когда был написан этот текст. Моей целью является здесь только реконструкция очень длительного исторического процесса, который в эпоху Среднего царства уже давно закончился. Я утверждаю лишь, что по тому окончательному состоянию, с которым мы встречаемся в наших текстах, мы можем сделать обратное умозаключение о тех силах, которые в гораздо более раннюю эпоху послужили толчком к вычислительной процедуре, окончательным результатом которой явились известная нам египетская арифметика дробей и, в частности, таблица величин $\frac{2}{n}$. Отдельные стадии этого процесса, которые я здесь набрасываю, отстоят друг от друга хронологически на большом расстоянии, первое же возникновение этого процесса относится к древнейшим периодам самостоятельной египетской культуры. Положение вещей здесь в общем весьма сходно с вавилонским. Из системы таблиц умножения и таблиц обратных значений, употреблявшихся вплоть до эпохи селевкидов, можно еще восстановить стадию развития, показывающую, что эта система таблиц развилась первоначально на основе гораздо более примитивных предположений, чем те, которые соответствуют позднему способу применения этих таблиц. Такой подход, разумеется, не ограничивается областью математики; он свойственен всякому серьезному историческому исследованию.

простым закономерным способом, который можно охарактеризовать формулами

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{n},$$

где n последовательно принимает все целые значения, кратные трем¹⁾. Оба эти столбца с вычислениями, таким образом, чрезвычайно характерны для всего египетского метода работы, когда из одной зависимости путем простейших процедур, как, например, путем удвоения или утроения чисел, получаются новые зависимости. Это как раз тот же метод, с которым мы имели дело уже выше, при счете с вспомогательными числами (ср. стр. 157), — «метод переноса», на котором всецело основан алгоритм умножения и деления. И так всегда, где бы ни встречались отдельные сложные зависимости, мы в каждом случае можем убедиться, что они не получены непосредственно, а выводятся как последнее звено в цепи самых простых действий над первым, непосредственно легко обозримым членом. Перейдем теперь к рассмотрению математической зависимости между двумя формулами, характеризующими одна правый, другая левый столбец в наших вычислениях. Из формулы для левого столбца

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n}$$

можно сразу же получить формулу для $\frac{2}{n}$, прибавляя к обеим частям равенства еще половину $\frac{1}{n}$. Соответственным образом можно поступить и с формулой правого столбца. Тогда мы получим

$$\frac{2}{n} = \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n};$$

в правой части этой формулы всегда стоят только основные дроби, так как мы берем только те n , которые делятся на три²⁾. Такую же зависимость мы можем получить и из формулы правого столбца:

$$\frac{3}{2n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{n};$$

для этого мы должны и от правой и от левой части отнять по $\frac{1}{n}$. И из той и из другой формулы мы можем получить для любого нечетного³⁾

¹⁾ Наши зависимости, таким образом, в действительности являются зависимостями между основными дробями.

²⁾ И, следовательно, $\frac{3}{2n}$ может быть выражено в виде основной дроби $\frac{1}{2 \cdot \frac{n}{3}}$.

Переводчик.

³⁾ Для четного n разложение дроби $\frac{2}{n}$ излишне, так как в этом случае дробь всегда сокращают на 2 (ср. выше, стр. 167). Поэтому только нечетные строки левого столбца в наших вычислениях могут служить для разложения $\frac{2}{n}$.

n , делящегося на три, разложение дробей $\frac{2}{n}$ на основные дроби, именно

$$\frac{2}{n} = \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Нетрудно убедиться в том, что все разложения, содержащиеся в таблице величин $\frac{2}{n}$, для n , кратного трем, следуют этому закону.

Итак, текст, о котором мы здесь говорили, дает для всех нечетных целых чисел, кратных трем, схему, руководясь которой можно непосредственно получить соответствующее разложение дроби $\frac{2}{n}$. О самом разложении текст не говорит ничего; равным образом в него непосредственно не вошло и общеизвестное разложение $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$, которое можно было так же непосредственно получить из данных в начале таблицы зависимостей; он дает, очевидно, только о б ъ я с н е н и е для уже известных зависимостей. Мы убедились, таким образом, в том, что зависимость $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$ представляет собой лишь начало ряда разложений для нечетных n , кратных трем, построенных вполне аналогично друг другу; далее мы познакомились с чисто схематическим методом, при помощи которого мы можем из о д н о й, легко непосредственно обозримой зависимости между натуральными дробями вывести целую серию дальнейших разложений. Таким образом эта процедура имеет два корня: во-первых, она исходит из «легко обозримых» зависимостей; во-вторых, она применяет схематический «принцип перепоса» вычислений, являющийся вообще основным принципом во всей египетской математике. Мы убедимся, что и при всевозможных других разложениях, содержащихся в таблице величин $\frac{2}{n}$, в основе лежат всегда эти простые принципы.

Те группы разложений дробей $\frac{2}{n}$, о которых мы только что говорили, т. е. разложения, имеющие своим исходным пунктом легко обозримую зависимость между натуральными дробями, иными словами, разложения для случаев, когда n кратно трем, несомненно когда-то исчерпывали собой тот материал, на котором строились правила действий над дробями. Мы попытаемся теперь уяснить себе, как можно применить указанную процедуру в более широком масштабе, чтобы получить из нее дальнейшие зависимости такого рода. Мы будем поэтому исходить из допущения, что египтяне, как это и было в действительности в нашем случае, уже были знакомы с некоторой зависимостью между основными дробями, которую можно, скажем, выразить в виде

$$\bar{a} = \bar{n} + a\bar{n}, \quad a < 1.$$

Я имею при этом в виду следующее. Допустим, что нам известна зависимость, при которой из основной дроби $\bar{n}$ при помощи прибавления к ней дробной части этой основной дроби снова получается основ-

ная дробь. Эта дробная часть не должна при этом быть обязательно простой частью, как, например, половина $\bar{n}^1$); она может иметь вид более сложного выражения, например $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ от n , или другого подобного этому выражения. При наличии такой первоначальной зависимости

$$\bar{a} = \bar{n} + \bar{a}n, \quad a < 1$$

можно путем прибавления дроби

$$\beta = 1 - a,$$

дополняющей a до единицы, немедленно получить разложение $\frac{2}{n}$. В самом деле, очевидно, что

$$(\bar{n} + \bar{a}n) + \beta\bar{n} = \bar{n} + (a + \beta)\bar{n} = \bar{n} + \bar{n} = \frac{2}{n} = \bar{a} + \beta\bar{n}.$$

Итак, если известна зависимость между основными дробями

$$\bar{a} = \bar{n} + \bar{a}n, \quad a < 1$$

и если известна дробь β , дополняющая a до единицы, то

$$\frac{2}{n} = \bar{a} + \beta\bar{n}.$$

Эти наблюдения необходимо и в этом случае привести в связь с историческими фактами. Прежде всего мы можем непосредственно указать на одну зависимость: переход от выражения вида $\bar{n} + \bar{a}n$ к $\frac{2}{n}$ путем прибавления дополнительной дроби $\beta\bar{n}$ стоит, как мы видели в гл. III, § 3, в теснейшей связи со структурой древнейших представлений о дроби, именно о взаимной связи между основной и дополнительной дробями. В указанном месте мы подробно показали, почему эти два понятия и дополнение до целой единицы являются, в полном смысле слова, лейтмотивом всех обозначений для дроби в языке и в письме.

Чтобы нашу аргументацию можно было применить для построения исторических теорий, необходимо еще внести два существенных ограничения в наши вычисления. Для того чтобы эти выкладки могли послужить исходным пунктом для установления сложных отношений, они должны сами быть достаточно простыми; только в этом случае их можно будет действительно считать естественным исходным пунктом. Для этого необходимо внести два ограничения. Во-первых, дробные части a и $1 - a = \beta$ от $\bar{n}$ должны быть сами по себе достаточно про-

¹⁾ Кстати, в этом случае мы имели бы как раз схему, положенную в основу группы, находящейся в левом столбце приводимых вычислений, именно:

$$\bar{3} + \bar{6} + \bar{2} \quad \left(\bar{n} = \bar{3}, a = \frac{1}{2}, \bar{a} = \bar{2} \right).$$

стими, т. е. прежде всего необходимо поставить условие, чтобы они были основными дробями¹⁾. С другой стороны, и вся зависимость $\bar{a} = \bar{n} + \frac{an}{n}$ должна быть простой, т. е., применяя введенную нами терминологию, она должна быть «легкоobservable» зависимостью или, что то же, в выражении $\bar{a} = \bar{n} + \frac{an}{n}$ должны встречаться только «натуральные» дробные части от n . Если эти требования выполнены, то нам придется иметь дело только с закономерностями, принадлежащими к древнейшей основной области дробей; они не предполагают у изучающего никаких систематически проведенных рассуждений, а, так сказать, действительно заданы вместе с этой областью.

Те разложения для n , кратного трем, о которых мы говорили выше, — разложения, имеющие исходным пунктом $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$, принадлежат к точно такому же типу. Треть и половина трети дают вместе опять же основную дробь $\bar{a} = \bar{2}$; если прибавить к обеим частям дробь, дополняющую половину трети до целой трети, т. е. $\frac{1}{2} \bar{3} = \bar{6}$, то получим в левой части треть плюс треть, а в правой — разложение на основные дроби $\bar{2} + \bar{6}$. Наконец вступает в свои права «принцип перепоса», дающий нам возможность получить из этой исходной зависимости без помощи каких бы то ни было дополнительных выкладок все существующие дальнейшие зависимости, которые можно описать при помощи формулы

$$\frac{2}{n} = \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n}, \quad n \equiv 0 (3).$$

Теперь мы получили возможность попытаться распространить примененный нами прием и на случаи других столь же простых исходных зависимостей. Простым случаем, соседним с $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, является, разумеется, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. В самом деле, как раз на этих дробях мы особенно отчетливо видели, что сущностью трети всегда считалось ее свойство «дополнять две части» двух третей до единицы (см. выше, стр. 106). В применении к нашим формулам это означает, что мы ищем зависимость между основными дробями, которую можно описать формулой

$$\bar{a} = \frac{1}{n} + \frac{2}{3n}.$$

Но выражение $\frac{1}{n} + \frac{2}{3n}$ может равняться основной дроби только в том случае, когда n делится на 5, так как

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{3n} = \frac{5}{3n}.$$

¹⁾ $\bar{3}$ в нашей терминологии всегда основная дробь.

Соответствующим разложением дроби $\frac{2}{n}$ будет в этом случае

$$\frac{2}{n} = \frac{5}{3n} + \frac{1}{3n},$$

а следовательно, в самом простом случае $\frac{2}{5} = \bar{3} + \bar{15}$. Как мы видим (ср. выше, стр. 171), это — каноническое разложение из таблицы величин $\frac{2}{n}$. Все сказанное верно и для всей серии разложений для случая нечетного n , кратного пяти (поскольку они еще не вошли в число разложений, имеющих исходным пунктом $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$).

Этим же путем можно пойти и еще дальше.

Следующей парой α и β , разумеется, будет $\alpha = 2 + \bar{4}$, $\beta = \bar{4}$; она приводит к зависимости между основными дробями:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{7}{4n}$$

и может послужить основой для соответствующего разложения дроби $\frac{2}{n}$ для случая, когда n кратно семи.

Таким образом мы совершенно естественным путем пришли к тем выкладкам, которые стоят в теснейшей связи с основной процедурой египетского учения о дробях, именно с оперированием рядами, направляющимися от $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. В результате этого в разложениях

дроби $\frac{2}{n}$ от времени до времени появляются члепы, знаменатели которых содержат множитель 2; поэтому, если в ходе вычислений имеет место удвоение, то оно иногда не ведет к увеличению числа слагаемых при разложении на основные дроби.

Описанные выше методы охватывают уже большое количество разложений дробей $\frac{2}{n}$. К каждой легко обозримой исходной зависимости примыкают, таким образом, целые серии разложений; следовательно, из множества, содержащего все целые нечетные числа n , как бы путем «просеивания» выделяются удовлетворяющие нужным нам условиям частные множества, давая вполне однозначным способом одно из разложений дроби $\frac{2}{n}$. Разумеется, выбирая надлежащим образом α , можно, в конце концов, достигнуть любого числа n ; для каждого дальнейшего случая, полученного тем же путем, можно найти подтверждение среди разложений, содержащихся в таблице. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этих частных вопросах; заметим только (и этого нельзя забывать), что наши выкладки имеют целью объяснить исторические факты и что поэтому, если бы мы стали распространять эту «процедуру просеивания» на любую, сколь угодно широкую область, мы совершили бы ошибку. Необходимо конечно считаться с указанными выше (стр. 176 и сл.) ограпи-

чивающими условиями, состоящими прежде всего в том, что исходная зависимость должна быть легко обозримой. Следствием этого является то, что описанная выше процедура не может охватить целый ряд чисел n (именно чисел n , имеющих только такие простые множители, которые больше числителей, получающихся из наших простых преобразований $\bar{a} = \bar{n} + a\bar{n}$). Поэтому мы можем уже теперь сказать, что вследствие необходимости ограничиться в нашей аргументации лишь исторически возможными исходными комбинациями нам придется разделить множество, состоящее из разложений дробей $\frac{2}{n}$, содержащихся в нашей таблице, на два класса: на группу, в которой разложения построены на основе описанной выше процедуры (сюда относятся, например, n , кратные 3, 5, 7), и все остальное множество, состоящее из разложений, построенных по другому закону.

Это априорное предположение всецело подтверждается при рассмотрении дошедших до нас разложений величин $\frac{2}{n}$. Остается еще целый ряд разложений для больших n , которые нельзя понять тем путем, как мы это делали до сих пор, так как пришлось бы восходить к исходному разложению, уже не обладающему легкой обозримостью. Однако и в этом случае нам нет нужды для объяснения дошедших до нас канонических разложений выходить за пределы известных нам египетских методов вычислений. В самом деле, нам известно уже то вспомогательное средство, которое выработалось постепенно для операций с нелегко обозримыми зависимостями между дробями: это — счет при помощи «вспомогательных чисел». Мы убедимся, что все такого рода разложения подчинены закономерности совсем иного рода; эту закономерность мы можем обнаружить, стоит только попытаться сделанные нами до сих пор наблюдения распространить и на нелегко обозримые зависимости, применяя при этом исключительно египетские методы вычислений.

Чтобы сделать понятнее наш ход мыслей, мы начнем с того, что охарактеризуем его при помощи нынешних математических формул. И в этом случае нашей отправной точкой будет такая зависимость

$$\bar{n} + a\bar{n} = \bar{a}$$

между основными дробями, которую без труда можно путем прибавления дополнительной дробной части $\beta\bar{n}$ от $\bar{n}$ дополнить так, чтобы получилось разложение дроби $\frac{2}{n}$. Новым в наших теперешних выкладках будет лишь следующее: нам придется допускать, что $a\bar{n}$ уже не есть натуральная дробная часть от $\bar{n}$, что ее можно описать только при помощи сложного, а не «легко обозримого» выражения. Такое выражение

$$\bar{n} + a\bar{n} = \frac{1}{n} \cdot (1 + a) = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{s}$$

станет некоторой основной дробью $\bar{a}$, если числитель r входит в качестве множителя в произведение $n \cdot s$; это произойдет прежде

всего в том простейшем случае, когда $r = n$. Число n -х, содержащихся в выражении $\bar{n} + a\bar{n}$, можно представить себе написанным на египетский лад в виде суммы основных дробей

$$1 + a = 1 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k$$

и затем попытаться преобразовать всю эту сумму в некоторую основную дробь, взятую n раз, т. е.

$$1 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k = \bar{n}a.$$

Если это достигнуто, то

$$\bar{n} + a\bar{n} = (1 + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k) \bar{n} = \bar{n}a \cdot \bar{n} = \bar{a}$$

есть основная дробь. И в этом случае перед нами стоит задача определить для дроби, выраженной в виде a , дополнение до единицы так, чтобы из $\bar{a} + \beta\bar{n}$ можно было получить разложение дроби $\frac{2}{n}$. Итак, вся задача состоит лишь в том, чтобы сумму основных дробей $1 + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k$ определить таким образом, чтобы она стала равна основной дроби, взятой n раз, что приведет нас к разложению для дроби $\frac{2}{n}$.

Теперь переведем эту задачу на язык египетской вычислительной техники.

Вся наша аргументация относится теперь только к тому случаю, когда $\frac{1}{a}$ уже не является легко обозримым выражением для дроби; поэтому в этом случае мы вынуждены вычислять сумму дробей с помощью «вспомогательных чисел». Итак, если необходимо составить выражение

$$1 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k = \bar{n}a,$$

то в рамках алгоритма вспомогательных чисел это означает следующее: необходимо определить сумму дробей таким образом, чтобы в сумме соответствующих каждому из слагаемых вспомогательных чисел получалось количество n , если на единицу вспомогательных чисел принять одну a -ю часть, т. е. если в основу положено соответствие

$$\begin{array}{cc} 1 & a \\ a & 1. \end{array}$$

Тогда нашей сумме $1 + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k$ согласно схеме

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & \bar{a}_1 & + & \bar{a}_2 & + & \dots & + & \bar{a}_k \\ a & & b_1 & & b_2 & & \dots & & b_k \end{array}$$

соответствует некоторая сумма вспомогательных чисел

$$a + b_1 + b_2 + \dots + b_k = n.$$

Таким образом наша задача разложения величины $\frac{2}{n}$ (где n , разумеется, есть нечетное число) приводится к задаче нахождения некоторого количества вспомогательных чисел, составляющих в сумме n . Эта задача производит впечатление сколько угодно многозначной, но такого характера она не имеет в рамках египетской вычислительной техники. В данном случае нам приходится иметь дело только с задачей на целые числа; при этом мы должны некоторое целое (нечетное) число n построить путем сложения из каких-либо слагаемых. Но это как раз та задача, которая является ядром египетской процедуры умножения. И при умножении мы имеем дело как раз с такой же задачей: умножение заменяется рядом последовательных сложений; способ выбора отдельных слагаемых при этом практически установлен с начала до конца вполне точно. Именно, в общем — это последовательность 1, 2, 4, ..., т. е., выражаясь точнее, бинарное разложение одного из множителей. Единственное допускаемое сокращение — это десятичная система счисления (ср. выше, стр. 130). Таким образом задача выражения n в виде суммы целых чисел в рамках египетской вычислительной техники практически однозначна. Но коль скоро получено такое разложение для n , коль скоро мы имеем слагаемые $a, b_1, \dots, b_k$, определены и соответствующие дроби $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, следовательно, и дробная часть α от $\bar{n}$, а следовательно, и ее дополнение β и наконец разложение дроби $\frac{2}{n}$.

В качестве примера рассмотрим разложение $\frac{2}{61}$. Для этой цели мы должны найти такое дробное выражение $\frac{1}{\alpha}$, чтобы сумма его вспомогательных чисел равнялась 61. По египетским правилам 61 разлагается, разумеется, так:

$$61 = 40 + 20 + 1.$$

Достаточно вспомнить египетскую систему цифр, чтобы понять, что египтяне шесть знаков десятков несомненно так же разлагали на 2 + 4 знака, как шесть знаков единиц на 2 + 4. Соответственные дроби получаются сразу же по схеме

$$\begin{array}{r} 40 \quad 1 \\ 1 \quad 40. \end{array}$$

Ясно, что получается

$$\begin{aligned} 61 &= 40 + 20 + 1 \\ &1 + \bar{2} + \bar{40}, \end{aligned}$$

и это $1 + \bar{2} + \bar{40}$ и есть наше $1 + \alpha$, т. е.

$$\bar{61} + (\bar{2} + \bar{40}) \bar{61} = (1 + \alpha) \bar{n} = \bar{40} = \alpha$$

есть основная дробь. Теперь мы должны только по классическим египетским методам вычислить β , дополнение α до единицы или, что то же, дополнение нашего выражения $1 + \alpha$ до двух. Но из

$$1 \quad 40$$

следует

$$2 \quad 80.$$

Мы знаем уже, что наша сумма дробей $1 + \alpha$ имеет значение

$$1 + \alpha \quad 61$$

(это было ведь исходным пунктом всех наших выкладок). Тогда β , дополняющее $1 + \alpha$ до двух, будет иметь значение $80 - 61 = 19$ вспомогательных единиц. Это опять же не что иное, как обычная основная задача египетского деления. Нам нужно, следовательно, только составить такую зависимость:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 40 \\ \overline{2} \quad 20 \\ \swarrow 4 \quad 10 \\ \swarrow 8 \quad 5. \end{array}$$

Таким путем мы нашли уже 15 из 19. Остается еще найти 4; оно получается, разумеется, из соответствия

$$\swarrow 10 \quad 4.$$

Следовательно, искомая дополнительная дробь

$$\beta = \overline{4} + \overline{8} + \overline{10}.$$

Тогда разложение дроби $\frac{2}{n}$ для $n = 61$ получит вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} &= \overline{a} + \beta \overline{n} = \overline{40} + (\overline{4} + \overline{8} + \overline{10}) \overline{61} = \\ &= \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}. \end{aligned}$$

То, что получилось, и есть как раз каноническое разложение дроби $\frac{2}{61}$ (ср. выше, стр. 171).

По аналогии с этим примером можно объяснить и остальные разложения дробей $\frac{2}{n}$, поскольку они не вошли в те группы последовательных разложений, которые имеют исходным пунктом легко обозримые зависимости. Единственным исключением принципиального характера является только последнее из разложений, сохранившихся в R, именно разложение $\frac{2}{101}$. Оно имеет такой вид:

$$\frac{2}{101} = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606};$$

оно, очевидно, тривиально, так как содержит в себе подлежащую разложению составную часть 101 и довольствуется применением равенства

$$\bar{2} + \bar{3} + \bar{6} = 1.$$

По этой схеме можно было бы, разумеется, разложить все дроби типа $\frac{2}{n}$. Я считаю возможным, что в этом единственном случае исключения перед нами — добавление переписчика рукописи R. С подобным же примером мы встретились уже на стр. 142.

Если мы вернемся теперь к ходу наших рассуждений, посвященных истории возникновения таблиц разложения дробей, то сможем констатировать две фазы развития. Одна фаза характеризуется методом, основанным непосредственно на сущности понятия дроби, и не содержит никакой математической аргументации; этот метод состоит в комбинировании простейших дробей с целью получить сумму, в два раза превышающую одну из них. Этого одного достаточно для того, чтобы путем чисто формального «перепоса» получить большое количество разложений дробей $\frac{2}{n}$; этот перепос опирается еще и на самый способ обозначения дробей, почти не отступающий от обычного изображения целых чисел. Вторая фаза, когда уже приходится иметь дело с освоением не «легко обозримых» агрегатов дробей, требует некоторой математической обработки. При этом необходимо уяснить себе, как можно от сумм дробных частей одной n -й путем систематического дополнения прийти к $\frac{2}{n}$. Это — единственная новая мысль, которой характеризуется рассматриваемая стадия. Однако этот прием не ограничен данной специальной областью; он применяется совершенно аналогичным образом в египетской процедуре деления, а по существу даже уже при умножении. Все операции египетской математики ставят себе целью ответить на один единственный и решающий вопрос: сколько остается еще прибавить путем сложения, чтобы получить известный результат? Таким образом даже наиболее сложная часть выкладок при составлении таблицы для дробей $\frac{2}{n}$ — именно та, в которой приходится применять вспомогательные числа, — во всех своих деталях точно следует образцу, засвидетельствованному в текстах на многочисленных примерах. Если сравнить наши последние выкладки с теми вычислениями, о которых мы говорили выше (стр. 160 и сл.), то непосредственно бросится в глаза полный параллелизм между той и другой процедурами.

Египетская вычислительная техника, которая с первого взгляда кажется причудливой смесью величайшей примитивности с поразительно длинными и сложными вычислениями, оказывается в результате наших исследований вполне единым, цельным и замкнутым в себе сооружением. Действительно, решающим моментом для понимания египетской математики является постижение ее чисто аддитивного характера — все ее процедуры основаны на сложении. По существу говоря,

египетская математика знает только о д н о действии: именно сложение. Все ее методы основываются прежде всего и во всем существенном на этом, так сказать, аддитивном ее характере. Ее удивительно сложная структура имеет причиной то, что эта процедура, складывающая и учитывающая результаты сложений, должна была применяться к области чисел, еще не перешагнувших в своем развитии через первоначальную форму аддитивно-десятичной системы, с одной стороны, и первобытных представлений о дроби, стоящих самостоятельно наряду с этой системой, — с другой. Таким образом мы вправе сказать, что египетская математика является единственным сохранившимся до нашего времени чистым примером вычислительной техники, очень развитой в своих достижениях, которая во всей своей истории не испытала ни одного существенного разрыва непрерывного развития: она, в самом деле, еще всецело основана на первобытнейшей основе счета, именно на присчитывании и на индивидуальных понятиях дробей. Все прочие системы — в интересующей нас области прежде всего вавилонская — пережили инородные влияния, проводившие в них глубокие борозды, разрушившие непосредственную связь с древнейшими основными понятиями и заменившие ее формальными операциями, которые, как учит нас история символических методов в математике, в дальнейшем развитии все больше и больше выходят за рамки того, что, повидимому, было их первоначальной сущностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ IV.

а) Е § 1:

(IV, 1) Peet T. E., *The Rhind Mathematical Papyrus*, Liverpool, University Press, 1923.

Издания папируса М:

(IV, 2) Struve W. W., *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abtlg. A 1, Berlin, Julius Springer, 1930. Ср. также рецензию Пита в *Journal of Egyptian Archaeology*, т. 17, стр. 154 и сл., 1931.

(IV, 1) останется навсегда основной обработкой R. Более новая обработка: (IV, 3) Chase, Bull, Manning and Archibald, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Mathematical Association of America, Ohio, Oberlin, 1929. Важнее всего то, что текст здесь воспроизведен фотографическим способом; далее важнее чрезвычайно тщательный и почти полный список литературы ко всей египетской математике, составленный Арчибалдом.

(IV, 4) Peet, *Mathematics in Ancient Egypt*, Manchester, *The Bulletin of the John Rylands Library*, т. 15, № 2, 1931. (Издано также отдельным оттиском.)

(IV, 5) Neugebauer, *Arithmetik und Rechentchnik der Ägypter*, QSB (V, 1) 1, стр. 301 и сл., 1930.

б) Е § 2:

(IV, 6) Neugebauer, *Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte*, QSB (V, 1) 1, стр. 413 и сл., 1930.

В частности, по поводу М 10 кроме Струве (IV, 2) см.:

(IV, 7) Peet, *A problem in Egyptian geometry*, *The Journal of Egyptian Archaeology*, т. 17, стр. 100 и сл., 1931.

в) Е § 3:

(IV, 8) Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Julius Springer, 1926. В этой книге можно найти разбор вопроса о таблице дробей $\frac{2}{n}$ во всех подробностях; выше дано лишь самое главное. Дополнения можно найти в (IV, 5).

(IV, 9) Glanville, S. R. K., The mathematical leather roll in the British Museum, The Journal of Egyptian Archaeology, т. 13, стр. 232 и сл., 1927. [Первая подробная публикация лондонского кожаного свитка, о котором мы говорили на стр. 172 и сл.; издан вторично в выдержках как приложение к (IV, 3).]

(IV, 10) Vogl, K., Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik, München, Beckstein, 1929.

БАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА.

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ.

Мы уже несколько раз упоминали о том, что принципиально интересные явления в вавилонской математике наблюдались главным образом в алгебраической части, т. е. в вопросах, которыми мы будем заниматься только в следующих параграфах. Однако предварительно мы скажем несколько слов и о геометрии — не только для полноты картины, но и потому, что в текстах постоянно имеются в виду факты геометрического порядка, поэтому нам необходимо составить себе представление о характере и содержании вавилонской геометрии.

Наиболее древними в сфере клинописной культуры являются в подавляющем большинстве «хозяйственные тексты». Это — главным образом табели платежей, инвентарь и т. п. Такие документы дошли до нас в тысячах экземпляров. К этому типу записей принадлежит и группа текстов, которые можно с известным правом охарактеризовать как древнейшие геометрические тексты — именно так называемые «планы полей». Это — по большей части грубо начерченные планы граничащих друг с другом полей, на которых указано, каковы размеры и площади отдельных участков. Таким образом эти планы полей принадлежат всецело к тому же типу, что и знаменитые акты дарения из Эдфу, о которых мы говорили выше, на стр. 139 и сл. Чертежи планов вавилонских полей в большинстве случаев не соответствуют написанным на них размерам и передают только в самых общих чертах положение и форму полей. Если сравнить данные величины площадей с числами, обозначающими длину сторон, то мы убедимся, что часто применяются средние значения, подобно тому, как это нам известно из египетских планов полей.

Такое вычисление площадей и объемов из средних значений есть нечто само собой подразумевающееся; оно применяется неоднократно и в гораздо более позднее время. Часть задач, находящихся в математических текстах, касается практических вопросов, как, например, вычисления числа людей, необходимых для выполнения определенных земляных работ, как-то: вырытия каналов или фундаментов под постройки, сооружения плотин или насыпей. Так, например, в этой связи мы встречаем для объема тела (речь идет об осадном вале) формулу

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2} \right) \cdot \frac{h+h'}{2} \cdot l,$$

где $a, \dots, l$ обозначают размеры, указанные на рис. 47.

Если такого рода задачи несомненно имели чисто практическое значение, то, исходя из них, можно тем не менее установить тот факт, что вавилонянам был известен целый ряд зависимостей из области элементарной геометрии, как, например, использование простых пропорциональностей в треугольнике и т. п. О том, что при измерении скатов приходится иметь дело со знаменателем отношения, соответствующим нашему котангенсу угла наклона, мы упомянули уже в связи с образованием аналогичных понятий в Египте (стр. 141). Эта величина дает отношение подошвы наклона, измеренной в GAR, к высоте его, измеренной в локтях. Это отношение обозначается термином *ša-gal*, аккадское чтение которого, вероятно, было *u-kullû* и во всяком случае стояло в связи с *akâlu*¹⁾, служившим термином для умножения (ср. выше, стр. 83 и 71). Его следовало бы сообразно этому переводить примерно словами «множитель», «коэффициент». Ввиду применения различных мер для вышины и для длины с шириной, эту функцию можно описать формулой $\frac{1}{\mu} \operatorname{ctg} \alpha$, где μ задано уравнением

$$1 \text{ локоть} : 1 \text{ GAR} = 1 : 12 = 1 : \mu.$$

К этому кругу задач принадлежит и грубо приближенная формула

$$F = \frac{U^2}{12},$$

связывающая длину окружности U и площадь круга F и основанная на приближенном значении 3 для π (ср. выше, стр. 143). К вопросу, не были ли известны лучшие приближения для π , мы скоро еще вернемся.

Исторически важная связь была использована при вычислении длины хорды или высоты сегмента, отсекаемого этой хордой (эту величину обычно называют «стрелкой» или «*sinus versus*»). Вычисление хорды s по диаметру d и высоте сегмента a производилось по следующей формуле (см. рис. 48):

$$s = \sqrt{d^2 - (d - 2a)^2}.$$

При обращении этой формулы получается

$$a = \frac{1}{2} (d - \sqrt{d^2 - s^2}).$$

Правильность этих соотношений следует непосредственно из рис. 48, если принять во внимание, что угол, вписанный в полуокружность, прямой, и если применить теорему Пифагора. Знакомство с этой за-

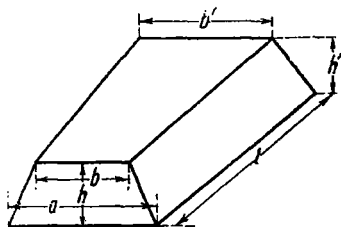


Рис. 47.

¹⁾ В одном из текстов дано syllabicкое написание: *i-ku-ul*.

висимостью доказано нашим текстом, принадлежащим, повидимому, к середине второго тысячелетия. Помимо этого, разбираемый здесь вопрос важен для позднейшей истории астрономии, ибо, как известно, античная тригонометрия оперировала не с нашими тригонометрическими функциями, а с хордами, опирающимися на двойной угол. В третьем томе этих лекций мы будем говорить подробно о соответствующих вычислениях у Птолемея: его учебник астрономии начинается, как известно, с вычисления так называемой «таблицы хорд», в которой длины хорд представлены как функции центрального угла.

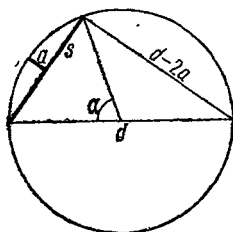


Рис. 48.

Самой собой разумеется, что наши математические тексты применяют и целый ряд других теорем, касающихся элементарных площадей,

как, например, площадей треугольника, прямоугольника, трапеции, и относящихся к этим фигурам отношений подобия, а также, например, вычисления высоты равнобедренного треугольника с помощью теоремы Пифагора и много другого в таком же роде. Это — обычные леса для воздвигающегося здания элементарной геометрии, совершенно аналогичные тому, что было выработано в Египте (исключая, может быть, лишь теоремы Пифагора).

Несколько подробнее здесь стоит остановиться только на тексте, посвященном вычислению поверхностей симметричных фигур¹⁾. К сожалению, сами вычисления не даны, имеются лишь краткие формулировки задач; так, применительно к рис. 49 (этот рисунок вместе с другими подобными, как, например, с данным ниже рис. 50, находится в этом тексте) сказано:

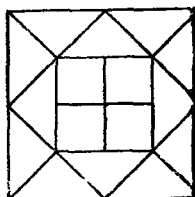


Рис. 49.

«1 (есть) длина. Квадрат.

12 треугольников (и) 4 квадрата я начертил.

Каковы их поверхности?»

Легко видеть, что соответствующие вычисления площадей могут быть выполнены без всяких затруднений и разве лишь требуют применения теоремы Пифагора для нахождения диагоналей квадрата.

Наиболее интересна в этом тексте группа задач, посвященная нахождению площади кругов: прежде всего пример, изображенный на рис. 50. Как и в других случаях, здесь требуется вычислить площади отдельных участков, на которые разбит квадрат. То, что у вавилонян были все предпосылки для решения этих задач, можно с несомненностью заключить из дошедших до нас примеров полных решений. В случае, изображенном на рис. 50, особого интереса заслуживает внутренняя область, состоящая из соединения трех круглых дисков. Чтобы определить ее площадь, необходимо от утроенной площади круга отнять два двугольника, образованные круговыми дугами (рис. 51),

¹⁾ Опубликовал С. J. G a d d, RA 19, стр. 149 и сл. (V, 3).

т. е. приходится заняться вычислением площадей таких фигур. Хотя то, о чем я сейчас хочу сказать, не имеет отношения к задачам вавилонской математики, но тем не менее я позволю себе указать здесь на связь, которая будет для нас важна во втором томе этих лекций при изучении истории задачи квадратуры круга. В этой связи нам будет важно знать, что уже вавилонская математика пришла к рассмотрению фигур, которые впоследствии приобрели важное значение при решении принципиальных вопросов о площадях геометрических фигур. Обозначим двугульник, ограниченный двумя дугами и общий обоям кругам, через Φ (ср. рис. 51), площадь круга — через F_K , площадь вписанного правильного шестиугольника — через F_6 . Тогда

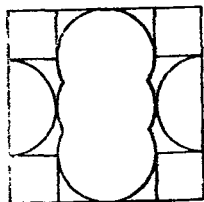


Рис. 50.

$$\Phi = \frac{2}{6} F_6 + \frac{4}{6} (F_K - F_6) = \frac{2}{3} F_K - \frac{1}{3} F_6.$$

Так как вся площадь равна

$$F = 3F_K - 2\Phi,$$

то

$$F = \frac{5}{3} F_K + \frac{2}{3} F_6 = F_K + 2M,$$

где M — площадь «луночки» (рис. 51). Из последнего равенства получаем, что

$$M = \frac{1}{3} (F_K + F_6).$$

Отсюда видно: если возможна квадратура площади луночки, т. е. «превращение» этой площади в площадь многоугольника, то возможна и квадратура круга, так как квадратура F_6 заведомо возможна.

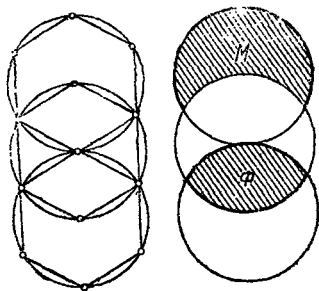


Рис. 51.

Как было сказано выше, подобного рода зависимости в истории квадратуры круга в Греции мы встретим не раз; поэтому не лишено интереса то обстоятельство, что уже вавилонская математика ставила задачи, методическое исследование которых должно было подвести к такого рода задачам квадратуры. Однако мы не имеем никакого повода предполагать, что те отношения, которые мы здесь вывели, играли какую-нибудь роль уже в вавилонских текстах. Но зато, с другой стороны, примеры вроде только что изученного показывают, как мне кажется, что 3 не было единственным известным вавилонянам приближенным значением для π . Не говоря о том, что это приближение

уже при чисто опытной проверке должно было оказаться крайне грубым, примеры вроде только что приведенного непосредственно показывают, что $\pi = 3$ не дает точного значения для площади круга, так как в этом случае площадь правильного шестиугольника не будет отличаться от площади описанного около него круга.

В заключение необходимо указать еще на один пример, в котором, к сожалению, содержится явная ошибка в вычислении, вследствие

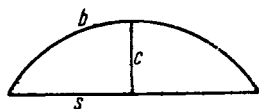


Рис. 52.

чего несомненное толкование этого текста не может быть дано. Как показывают чертеж (рис. 52) и текст, здесь речь идет о вычислении площади кругового сегмента, когда дана длина дуги b и хорды s . Кстати, вполне возможно, что в заданном числовом примере хорда является стороной правильного впи-

санного треугольника, так как при вычислении центрального угла получаем с большой точностью 120° . Выкладки, содержащиеся в тексте, могут быть, пожалуй, переданы следующей формулой:

$$F = s \cdot (b - s) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{(b - s)^2} \right\}$$

При этом совершенно несомненна транскрипция первого слагаемого как $s \cdot (b - s)$, но уже за коэффициент $\frac{1}{2}$ второго выражения нельзя ручаться. При переводе на язык пынешней математики дальнейших вычислений, не говоря уже о других возможностях, открыт свободный выбор между тем, что написано в верхней строке, и тем, что написано в нижней строке правого слагаемого, т. е. между c^2 и $(b - s)^2$, где c означает стрелку сегмента. Так как вообще трудно понять, каким образом могли прийти к формуле, имеющей такую структуру, то невозможно сделать обоснованный выбор между различными возможностями, тем более, что, как сказано было выше, текст содержит ошибку в вычислении, от исправления которой зависят различные возможности толкования. Для сколько-нибудь убедительного решения этой проблемы необходимы новые находки.

Наряду с тривиальными вычислениями объема (куба, параллелепипеда, призматического тела, с трапецией в поперечном сечении) мы находим также вычисление объема усеченного конуса по приближенной формуле

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{12} + \frac{u_2^2}{12} \right) h,$$

где u_1 — длина окружности основания с площадью F_1 , u_2 — длина окружности другого основания с площадью F_2 . Если принять во внимание, что приближенным значением π было 3, то это равносильно формуле

$$V = \frac{F_1 + F_2}{2} h.$$

Соответственная приближенная формула дошла и для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. Но наряду с ней встречается и точная формула

$$V = h \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right],$$

где a и b — соответственно стороны большого и малого квадратных оснований. При транскрипции этой формулы на язык нынешней математики лишь одно место остается несколько спорным, так как текст допускает транскрипцию второго члена, стоящего в квадратных скобках, и как $\frac{a-b}{4}$ вместо $\frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$. Но так как это толкование приводит к неправильным результатам, хотя бы ввиду разницы в измерении обоих членов, то мне кажется, что данное здесь толкование можно практически считать доказанным.

§ 2. ИЗ ОБЛАСТИ АРИФМЕТИКИ.

Мое изложение вавилонской геометрии было очень кратким по той причине, что в этой области не сделано никаких значительных новых открытий, которые показали бы нам что-либо характерное для догреческой математики. Правда, вавилонская геометрия показывает нам, что уже в то время был известен целый ряд математических истин, открытие которых часто считали необходимым приурочивать к гораздо более позднему времени. Но когда вообще известно, что в той или иной культуре математическая литература достигла сколько-нибудь значительного развития, всегда можно уже *a priori* предположить, что она естественным путем пришла прежде всего к достижениям, изложенным в предшествующем параграфе. Другое дело то, о чем мы будем говорить в этом и следующем параграфах. Здесь речь идет о достижениях, далеко выходящих из рамок того, к чему необходимо приводит первоначальное изучение вопросов математики. Сперва мы познакомимся с двумя примерами из математических текстов, которые следует отнести к области «арифметики». В дальнейшем мы убедимся, что здесь речь идет не об изолированных и, так сказать, случайных открытиях вавилонской математики: по своему уровню вавилонская математика достигла такой высокой степени алгебраизации, которой наша математика достигла только в начале новой истории.

Сперва мы рассмотрим формулу для суммы квадратов первых 10 чисел. Вычисление производится, если мы заменим 10 в общем виде буквой n , по следующему закону:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} (1 + 2n) \sum_{i=1}^n i.$$

Разумеется, эта формула дана для частных числовых значений и при том тем же способом, как давались формулы в примерах, разобранных

выше. С таким же способом замены общих формул мы встретимся еще в других задачах.

Как пришли к той закономерности, которую дает приведенное выше выражение для суммы квадратов целых чисел на основании нашего материала, конечно, сказать нельзя, так как все наши тексты, как известно, дают всегда окончательный результат в готовом виде и никогда не дают его вывода. Но из самой природы задачи можно заключить, что этой окончательной формуле предшествовали некие преобразования. Само собой разумеется, что в результате должно получиться целое число, хотя в формулу и входит дробь. Подобного рода зависимости из области теории чисел неизбежно требуют некоторого вычислительного процесса; формулы, держащие в своей структуре дроби, не могут быть получены путем простого обобщения наблюдений над целыми числами.

Я хочу здесь все же внести предложение относительно восстановления вывода этой формулы. Его преимущество заключается в том, что оно не выходит из рамок тех вспомогательных приемов, которые применялись в вавилонской математике, и что оно приводит к данной выше формуле, а не к обычной:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(впрочем, эту формулу можно получить из нашей, заменяя $\sum_1^n i$ выражением $\frac{n(n+1)}{2}$). Рассмотрим расположение элементов в схеме рис. 53.

На этом рисунке можно непосредственно прочесть следующее: сумма квадратов (изображенная черными точками) может быть вычислена тем путем, что сначала сосчитывают все точки, складывая между собой все горизонтальные ряды, т. е. образуя $n \cdot \sum_1^n i$, и из этого результата вычитают те из взятых точек, которые были лишними, именно: сначала верхний горизонтальный ряд, т. е. $\sum_1^{n-1} i$, затем второй ряд сверху, т. е. $\sum_1^{n-2} i$, и т. д., вплоть до второго ряда, считая снизу, который содержит только одну лишнюю точку. Итак,

$$\sum_1^n i^2 = n \sum_1^n i - \left(\sum_1^{n-1} i + \sum_1^{n-2} i + \dots + 1 \right).$$

Каждое слагаемое в круглых скобках представляет арифметическую прогрессию, сумма которой равна $k \frac{k+1}{2}$, если складывается k чле-

нов. Все число, стоящее в круглых скобках, можно поэтому заменить выражением

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2}$$

или, производя умножение под знаком суммы,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

Но эта сумма имеет только $n-1$ членов вместо n членов. Если мы хотим суммы $n-1$ членов замесить суммами всех n членов, то необходимо, для того чтобы уравновесить эту замену, отнять высший член в каждой сумме, иными словами, имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-2} i + \dots + 1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i - \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right).$$

Но выражение $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ есть опять же не что иное, как сумма целых чисел от 1 до n ; эта формула была уже нами использована. В результате вычисления получается:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= n \sum_{i=1}^n i - \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i \right) = \\ &= \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned}$$

Перепеся стоящую в правой части полусумму квадратов в левую часть, получим

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i.$$

Отсюда для самой суммы квадратов получается формула, содержащаяся в нашем тексте.

Данный здесь вывод не содержит ничего такого, что превышало бы силы вавилонской математики ¹⁾. Но необходимо еще раз подчеркнуть.

¹⁾ Здесь Нейгебауер, кладя в основу чрезвычайно искусственную процедуру Архимеда и применяя нынешнюю символику вроде $\sum_{i=1}^n i^2$ и т. д., путем ряда

сложных преобразований приходит к нужному ему результату. Он сам понимает, что к допущению такого рода манипуляций у древних вавилонян читатель не может не отнестись с недоверием, но его вера в неограниченные воз-

что для восстановления действительного хода доказательства мы не имеем никакой опоры в тексте, так что наша догадка может рацеливаться лишь как принципиально возможный вывод.

Теперь рассмотрим другой пример, содержащий арифметическую прогрессию. В этом случае изложение настолько подробно, что мы можем следить за каждым шагом рассуждения.

Возможности вавилонской математики непоколебима, и поэтому он и замечает: «данный здесь вывод не содержит ничего такого, что превышало бы силы вавилонской математики».

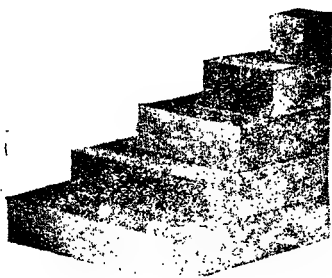


Рис. 54a.

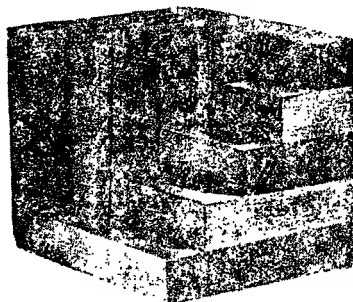


Рис. 54b

В действительности же при геометрическом подходе к этой задаче она совершенно элементарна. Стоит представить себе ряд

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$$

в виде ступенчатой пирамиды, состоящей из ряда квадратных слоев толщиной в единицу меры, из которых верхний представляет собой куб, следующий — параллелепипед с квадратом 2^2 в основании, третий — с квадратом 3^2 и т. д., и сложить три такие ступенчатые пирамиды, как указано на приложенных фотоснимках (рис. 54a, b, c), чтобы убедиться, что получается: 1) параллелепипед с измерениями $x, x+1$ и x , т. е. куб с наложенным на него слоем толщиной в единицу — тело, с которым мы многократно встречаемся в вавилонских задачах, и еще 2) «ступенчатый треугольник» с толщиной, равной единице меры, т. е. сумма членов ряда

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

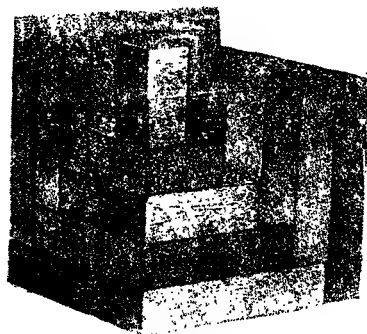


Рис. 54c.

Но вавилонянам было хорошо известно, что если указанный параллелепипед разбить на слои указанного типа (с высотой, равной единице), то каждый такой слой (его измерения x и $x+1$) будет состоять из двух ступенчатых треугольников. Так как та-

ких рядов n , то ступенчатых треугольников в параллелепипеде $2n$, а всего $2n+1$. Таким образом мы получаем без труда вавилонскую формулу.

Переводчик.

В тексте содержится следующее:

«10 братьев (и) $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат выше брата (в отношении его доли). На сколько он выше, я не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом, на сколько он выше?»

Это означает: имущество в $1\frac{2}{3}$ мины серебра, т. е. в 1 мину и 40 шекелей (см. выше, стр. 117 и сл.) надо разделить между $n = 10$ братьями. Доли A_i каждого из братьев отличаются друг от друга на постоянную величину δ , — текст не говорит, правда, прямо, что эта разница между частями должна быть постоянной, но вычисление покажет нам это тотчас же, не говоря уже о том, что в противном случае задача была бы совершенно неопределепной. Такая скупость в выражениях, впрочем, весьма обычна. Она ясно показывает, что тексты эти дополнялись в процессе устного обучения, причем задачи пополнялись рядом новых данных, извлеченных из самого содержания задачи. Эти данные несомненно брались, как и из знакомства с положением вещей в живом жизненном опыте и были тогда общеизвестны. В другом положении мы теперь: нам приходится восстапавливать их с величайшими трудностями. Впрочем, в данном случае никаких сколько-нибудь серьезных трудностей нет.

Ход вычисления таков:

«Образуй обратную величину от 10, от людей, и это дает 0;6. Ты умножаешь 0;6 на $1\frac{2}{3}$ мины серебра, и это дает 0;10. 0;10 удвой, и это дает 0;20».

Таким путем вычислена удвоенная средняя доля, т. е. $2A_m$, где

$$A_m = \frac{1}{n} \sum A_i.$$

Текст продолжается так:

«0;6, часть восьмого удвой, и это дает 0;12. 0;12 вычитается из 0;20, и это дает 0;8. Пусть удержит твоя голова 0;8».

Здесь, таким образом, использовано условие, что доля восьмого брата равна 6 шекелям = 0;6 мины. Таким путем образовано $2A_m - 2A_8$. Возвращаемся к тексту:

«1 и 1... складывается, и это дает 2. 2 удвой, и это дает 4. Ты прибавляешь 1 к 4, и это дает 5. 5 от 10, числа людей, вычитается, и это дает 5».

Толкование этого места требует некоторого размышления. Из числа братьев $n = 10$ вычитается число 5, полученное из $2(1 + 1) + 1$. К сожалению, слово, стоящее за $1 + 1$, непонятно. Но по смыслу задачи 5 есть a , число отдельных интервалов между восьмым и третьим братьями. Для наглядности представим это вычисление интервалов графически (рис. 55). Между первым и третьим братьями лежит $1 + 1$ интервал и такой же промежуток между восьмым и десятым. Таким

образом вместе это составляет $2(1 + 1)$ интервала. Тогда число интервалов, лежащих между третьей и восьмой долями, равно

$$n = [2(1 + 1) + 1],$$

и это точно соответствует ходу нашего вычисления.

Далее в тексте читаем:

«Обратное от 5 образуй, и это дает 0;12. 0;12 множится на 0;8, и 0;1,36 дает это».

Это означает (рис. 55), что разность $2(A_m - A_s)$, вычисленная в предыдущем разделе, являющаяся также, разумеется, и разностью между неизвестной долей A_s и данной долей A_m , определяется числом n интервалов между A_s и A_m . Таким образом только что образованное частное является искомой разностью между двумя последовательными интервалами. И в самом деле, в тексте мы читаем:

«0;1,36 (мин есть то, на) что брат выше брата».

Отсюда можно видеть: разность арифметической прогрессии с данным числом членов и данным одним из членов вычисляется способом, который и мы в настоящее время не могли бы заменить никаким другим.

Наши тексты содержат еще значительное число сходных примеров на арифметическую и геометрическую прогрессии, подтверждающих, что вавилоняне прекрасно отдавали себе отчет в существующих в этих прогрессиях закономерностях. Поэтому мы не будем дальше останавливаться на этих примерах, а перейдем к той области, которая дает нам возможность бросить

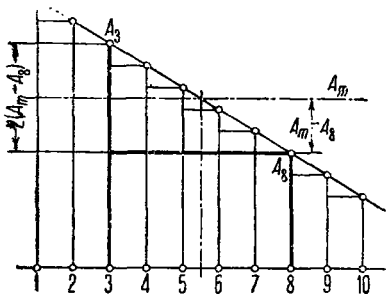


Рис. 55.

взгляд на интереснейшие явления, характеризующие самый тип вавилонской математики, именно к алгебраическим задачам.

§ 3. АЛГЕБРА.

а) Системы линейных уравнений.

1. Разложение треугольника (5 неизвестных).

Мы начнем с рассмотрения таблички, внешний вид которой изображен на рис. 56. В верхней ее части можно распознать очертания трапеции, суживающейся слева направо; она разделена прямой на две трапеции, в которых стоят соответственно числа 13,3 и 22,57. Над соответственными отрезками верхней стороны стоят числа 1 и 3. В следующих затем строках читаем:

«Трапеция, в ней две полосы. 13,3 верхняя площадь, 22,57 вторая площадь. Для верхней длины третья часть нижней длины.

То, чем верхняя ширина выдается над разделяющей линией, и то, чем разделяющая линия выдается над нижней шириной, сложенные вместе, дают 36. Длины, ширины и разделятельная линия, что опи?»

Мы знаем уже (ср. стр. 50), что фигуры надо представлять себе повернутыми на 90° ; так что текст справедливо называет площадь левой полосы верхней площадью. Следовательно, фигуру, о которой идет речь, надо представлять себе так, как она начерчена на рис. 57. Сравнение числовых данных с чертежом в тексте показывает, что чертеж в смысле масштаба абсолютно верен; это наблюдение справедливо для любого из чертежей, находящихся в вавилонских текстах. Во всех случаях дан только набросок в самом общем виде, представляющий что-то вроде краткого концепта задачи. Это — большой ущерб для наших исследований, так как из этих чертежей нельзя заключить, имеет ли составитель в виду прямоугольную, симметричную фигуру или что-либо подобное. О таких вещах приходится всегда заключать либо из хода вычислений, либо из терминологии.

Как мы видим, в нашей задаче требуется вычислить пять неизвестных величин (рис. 58), именно b_1, b_2, b_3, l_1, l_2 , по данным

$$F_1 = 13,3,$$

$$F_2 = 22,57,$$

$$l_1 : l_2 = \alpha : \beta = 1 : 3,$$

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = c = 36.$$

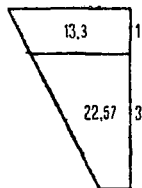


Рис. 57.

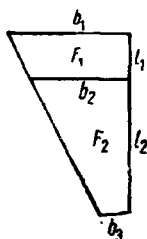


Рис. 58.

Таким образом в этих данных не хватает одного соотношения, но ясно, какое дополнительное условие следует еще сюда прибавить. Обе трапеции вместе, очевидно, должны образовывать одну трапецию, а это значит, что

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2}.$$

Можно также сказать, что

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha}{\beta},$$

если принять во внимание третье задание условия. Иными словами

$$b_1 - b_2 = \alpha \Delta,$$

$$b_2 - b_3 = \beta \Delta.$$

Если присоединить сюда еще четвертое задание, то получим

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = (\alpha + \beta) \Delta = c = 36.$$

Вычисление, содержащееся в тексте, начинается делением $c = 36$ на сумму $\alpha + \beta = 4$, откуда находится величина, обозначенная у нас символом Δ :

$$\frac{c}{\alpha + \beta} = \Delta = 9.$$

Затем следует умножение 9 на 1 и 9 на 3, т. е. образуют

$$\alpha \Delta = b_1 - b_2 = 9 \text{ и } \beta \Delta = b_2 - b_3 = 27$$

и замечают по этому поводу:

«9 есть то, на что верхняя ширина выдается за разделительную линию; 27 есть то, на что разделительная линия выдается за нижнюю ширину».

Этот расчет в тексте доказывает, таким образом, с несомненностью, что добавленное нами как подразумевающееся условие действительно было использовано в тексте. Само собой разумеется, отсюда вытекает не больше и не меньше, как то, что зависимости, использованные нами, были его составителем вполне известны.

Затем составитель шаг за шагом образует следующее выражение:

$$\left(\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2 \right) \frac{2}{\alpha + \beta} = 2,42.$$

Мы совершенно неизбежно ¹⁾ придем к пониманию этих выкладок,

¹⁾ Таким образом Нейгебауер считает это данное им алгебраическое решение единственным возможным толкованием («ganz zwangsläufig»).

Между тем, если решить эту задачу тем арифметическим способом, который широко применялся в индийской и арабской математике и который скорее всего восходит к Вавилону, именно методом ложного предположения, то каждое из действий, примененных в тексте, получит свой смысл и не окажется никакой нужды в внешней алгебре.

Для того чтобы разности представить себе не как отвлеченные понятия, а конкретно (а только такое понимание мы вправе постулировать на начальных ступенях математики), проведем в трапеции вертикальные прямые EB и HC (рис. 59). Тогда «разность между основаниями верхней трапеции» есть AB ; разность между основаниями нижней трапеции есть EF . Но $EF = BC$, а следовательно, сумма этих разностей есть AC , и AC равно 36.

Теперь делаем ложное предположение (а именно так обычно подходят к пропорциональности в индийской и арабской математике), что

$$DG = 1, \text{ а } GI = 3.$$

Мы знаем, что древним вавилонянам было известно правило, по которому площадь трапеции равна полупроизведению суммы оснований на высоту. Площадь верхней трапеции 783, высота 1; отсюда полусумма оснований $783 : 1 =$

если заметим, что, собственно, первые два заданных условия нами еще не использованы. Значит, мы должны каким-либо образом использовать то, что площади обеих трапеций могут быть выражены через неизвестные отрезки:

$$F_1 = \frac{l_1}{2} (b_1 + b_2)$$

и соответственно

$$F_2 = \frac{l_2}{2} (b_2 + b_3).$$

Если мы используем еще раз третье заданное условие, которое можно представить в виде

$$l_1 = \alpha A, \quad l_2 = \beta A,$$

то убедимся, что

$$\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{l_1}{\alpha} (b_1 + b_2) - \frac{l_2}{\beta} (b_2 + b_3) \right]$$

можно представить упрощенно в виде

$$\frac{1}{\alpha} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2 = \frac{1}{2} A (b_1 - b_3).$$

Но в тексте было уже выше вычислено, что

$$b_1 - b_2 = \alpha \Delta, \quad b_2 - b_3 = \beta \Delta,$$

откуда

$$b_1 - b_3 = (\alpha + \beta) \Delta.$$

= 783, а вся сумма 1566. Таким же образом полусумма оснований нижней трапеции $1377 : 3 = 459$, а сумма 918. Если сравнить эти суммы, то оказывается, что вторая сумма больше первой на 648. Чем вызвана эта разница? В первой сумме к среднему основанию прибавляется верхнее, во второй — нижнее. Значит, эта разница обусловлена тем, что нижнее основание больше верхнего; следовательно, нижнее основание больше верхнего на 648. Но разницей между нижним и верхним основаниями является отрезок AC , равный не 648, а только 36, т. е. в 18 раз меньше. В чем причина ошибки? Очевидно, в том, что высота взята слишком маленькая, поэтому (при той же площади) основания и их отрезки получились слишком большими: если мы увеличим высоту в 18 раз, то эта ошибка выравняется. Иными словами, высота верхней трапеции 18, нижней 54. Дальнейшее решение уже настолько элементарно и далеко от какой бы то ни было алгебры, что его можно и не приводить. Необходимо, однако, указать на то, что в этой последней части решения и Нейгебауер не обходится уже чисто алгебраическими спекуляциями и проводит наконец ту линию HC , которую ему нужно было бы провести уже в начале решения. *Переводчик.*

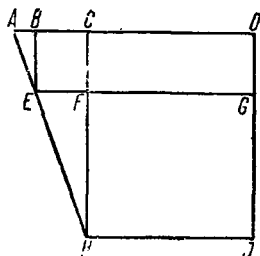


Рис. 59.

Если ввести это выражение в нашу последнюю формулу, то получится, что вычисление в тексте имеет такой смысл:

$$\left(\frac{1}{a} F_1 - \frac{1}{\beta} F_2 \right) \frac{2}{a + \beta} = \Lambda \Delta = 2,42.$$

Так как Δ уже было вычислено ($\Delta = 9$), то Λ может быть определено путем простого деления, и в самом деле, текст дает нам ¹⁾

$$\Lambda = 18.$$

Затем составитель текста снова умножает 18 на 1 и 3 и получает соответственно $\Lambda a = l_1$ и $\beta \Lambda = l_2 = 54$. Таким образом два первых неизвестных l_1 и l_2 определены («18 верхняя длина», «54 нижняя длина»).

Чтобы понять последнюю часть вычисления, содержащегося в нашем тексте, мы разлагаем всю трапецию, как показано на рис. 60, на площадь прямоугольника F_R и на площадь треугольника F_D . В тексте следует преобразование

$$\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1,12 = 21,36.$$

36 известно нам из условий задачи как $c = b_1 - b_3$.

1,12 есть сумма только что вычисленных длин. Таким образом здесь вычислялась площадь

$$F_D = \frac{1}{2} (b_1 - b_3) (l_1 + l_2).$$

Ближайшим шагом в вычислении является вычитание: $36,0 - 21,36 = 14,24$. Здесь, как можно с первого же взгляда понять, 36,0 есть сумма площадей двух данных трапеций: $F_1 = 13,3$ и $F_2 = 22,57$, а 21,36 — только что вычисленная площадь треугольника F_D . Ясно, что здесь вычислялась площадь прямоугольника

$$F_R = (F_1 + F_2) - F_D.$$

Итак, теперь в прямоугольнике площадь $F_R = 14,24$ и одна из сторон $l_1 + l_2 = 1,12$. Отсюда составитель задачи получает непосредственно нижнюю ширину в виде

$$b_3 = \frac{F_R}{l_1 + l_2} = 12.$$

Таким путем определено третье неизвестное.

Оба последних неизвестных получаются следующим очевидным путем:

$$b_1 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + b_3 = c + b_3 = 36 + 12 = 48$$

и

$$b_2 = b_3 + (b_2 - b_3) = b_3 + \beta \Delta = 12 + 27 = 39.$$

¹⁾ Правда, это получается несколько обходным путем (вызванным исключительно техникой счета).

Таким образом задача во всех ее частях решена совершенно правильно.

Этот текст является во всех отношениях особенно поучительным примером для суждения о характере «собственно математических текстов». Формулировка, правда, еще геометрическая, но самое вычисление не что иное, как чисто алгебраическое определение неизвестных на основании известных данных отношений. Вычисление ведется с величайшим изяществом и совершенно тем же методом, который применили бы и мы теперь; оно показывает с полной несомненностью, что вавилоны совершенно владели всеми приемами, основанными на использовании внутренних зависимостей. Достаточно обратить внимание хотя бы на то, как отмечается умножение на единицу в каждом случае, когда по общей формуле необходимо умножать на a , хотя это действие совершенно не влияет на величину численного результата. Особенно же необходимо считаться с неизвестными, встречающимися здесь, как действительно с неизвестными, в полном смысле слова, так как наше вычисление в основе своей покоится на том, что известны отношения между величинами, сохраняющие свою силу во всех случаях, даже когда эти величины неизвестны. Это оперирование с величинами, которые должны удовлетворять известным отношениям, причем самые эти величины численно неизвестны, в конце концов и является сущностью алгебраического метода.

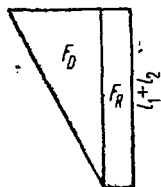


Рис. 60.

Пример этот поучителен еще и потому, что он показывает, как нам следует относиться к математическим клинописным текстам. Правда, вычисления без всяких пропусков ведутся шаг за шагом так, как я их передал, но они не содержат никакого объяснения смысла и внутренней целеустремленности подчас очень сложных выражений, получающихся в результате преобразований в процессе вычисления. Как мы видели, эти выражения полны глубокого смысла и удачно подобраны для задачи; однако, чтобы понять их, необходимо заранее знать, как можно вообще подходить к примерам типа разбираемой задачи.

Это показывает нам, с другой стороны, со всей возможной ясностью, что эти тексты являются лишь остоном для устной передачи учителя, который умел общие закономерности сделать понятными на отдельных примерах.

Если мы еще раз вернемся к общему ходу нашего вычисления, то убедимся, что фактически в нашем толковании этого текста не остается ничего сомнительного, но важно обратить внимание на то, что лишь самое вычисление суживает возможности интерпретации и приводит нас, таким образом, к однозначному толкованию терминов. На первых порах ни чертеж в тексте, ни наименование величин, как «верхняя» и «нижняя ширина», «верхняя» и «нижняя длина» и «разделительная линия», не дают достаточно указаний для того, чтобы с уверенностью дать однозначное толкование проблемы. То, что частные трапеции при соединении также образуют трапецию, видно толь-

ко из чисто математической связи — из того, что, кроме прочего, использована пропорциональность

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2}.$$

Но и в этом случае форма фигуры еще не определена окончательно, так как и при этом условии можно было бы еще полагать, что речь идет не о прямоугольной трапеции, т. е. что «длины» не перпендикулярны «ширинам»; в этом случае формулы для трапеции были бы только приближенными формулами. Лишь тот факт, что использована зависимость

$$F_R = (l_1 + l_2) b_3,$$

вынуждает нас (если только отвергнуть абсурдную возможность, что и здесь мы имеем дело с приближенной формулой) считать, что $l_1 + l_2$ перпендикулярно к b_3 .

Таким же образом, как здесь, и во всех других случаях мы вынуждены приходить к решению, действительно не подлежащему сомнению, лишь шаг за шагом, ощупью. Разумеется, существенной пользой в этом случае является то, что при интерпретации каждого нового текста можно воспользоваться опытом, приобретенным при изучении других текстов. Благодаря этому наше знакомство с вавилонской математикой постепенно во всех деталях так увеличилось и упрочилось, что в настоящее время текст, вроде только что разобранного, мы можем переводить и комментировать с полной уверенностью. Приводимые вслед за этим примером другие характерные примеры, выбранные из большого числа подобных им, покажут с достаточной убедительностью, какой стройной и законченной картиной вавилонской математики мы обладаем уже теперь.

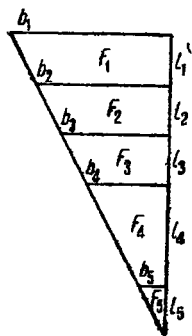


Рис. 61.

2. Разложение треугольника (10 неизвестных).

Прежде чем перейти к другим типам задач, необходимо упомянуть еще об одном примере, совершенно аналогичном предыдущему, но имеющем не только 5, но даже 10 неизвестных, которые нужно найти на основании линейных соотношений. И в этом случае речь идет о задаче, сформулированной геометрически, именно о разложении треугольника на параллельные полосы, как указано на рис. 61. Даны следующие шесть зависимостей:

$$F_1 = 18,20,$$

$$F_2 = 15,0,$$

$$F_4 = 13,20,$$

$$\begin{aligned}b_1 - b_2 &= 13;20, \\b_2 - b_3 &= 13;20, \\ \frac{1}{2} (b_4 - b_5) &= 13;20.\end{aligned}$$

Недостает еще четырех зависимостей, но их можно получить непосредственно из отношений подобия

$$\frac{b_1 - b_2}{l_1} = \frac{b_2 - b_3}{l_2} = \frac{b_3 - b_4}{l_3} = \frac{b_4 - b_5}{l_4} = \frac{b_5}{l_5}.$$

Требуется найти 10 величин: $b_1, \dots, b_5$ и $l_1, \dots, l_5$.

Эта задача заимствована из текста, который содержит только задачи без вычислений, так что ход действия до нас не дошел. Но из того, что было сказано в предыдущем разделе, ясно, что вавилоняне располагали всеми средствами для полного решения поставленной задачи.

3. Два неизвестных:

В дальнейшем нашем изложении мы будем иметь дело с двумя текстами, содержащими в общей сложности десять аналогично построенных линейных задач с доведенными до конца вычислениями, из которых я приведу здесь одну, как типичный пример.

Внешнее оформление этой задачи такое: Два поля, площадь которых F_1 и F_2 , дают количества зерна соответственно G_1 и G_2 (выраженные в единицах меры qa). Удельный урожай в первом случае g_1 , во втором g_2 ; это значит, что g_1 есть отношение количества зерна γ_1 , произрастающего на площади φ [$= 1 \text{ bur} = 30,0 \text{ GAR}^2$ (см. выше, стр. 117)], к φ и соответственно $g_2 = \gamma_2 : \varphi$. В нашем случае согласно сказанному дано:

$$\begin{aligned}\varphi &= 30,0 \text{ GAR}^2, & S &= F_1 + F_2 = 30,0 \text{ GAR}^2, \\ \gamma_1 &= 20,0 \text{ qa}, & \Sigma &= G_1 + G_2 = 18,20 \text{ qa}, \\ \gamma_2 &= 15,0 \text{ qa},\end{aligned}$$

Требуется найти F_1 и F_2 .

Вычисление в тексте разделяется на следующие шаги.

Сначала вычисляются

$$\frac{S}{2} \cdot \frac{\gamma_1}{\varphi} = 10,0 \quad \text{и} \quad \frac{S}{2} \cdot \frac{\gamma_2}{\varphi} = 7,30,$$

откуда

$$\Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) = 50; \quad (1)$$

затем

$$\frac{\gamma_1}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi} = 0;10,$$

откуда

$$1 : \left(\frac{\gamma_1}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) = 6.$$

Это множится на результат (1):

$$\frac{1}{\frac{\gamma_1}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi}} \left\{ \Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) \right\} = 5,0 \quad (2)$$

и наконец из

$$\frac{S}{2} \pm \frac{1}{\frac{\gamma_1}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi}} \left\{ \Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) \right\} = \begin{cases} 20,0 = F_1 \\ 10,0 = F_2 \end{cases} \quad (3)$$

вычисляются неизвестные. При этом операция, изображаемая здесь знаком $\pm$, в тексте дана описательно в следующих словах:

«5,0 от 15,0 это есть $\frac{S}{2}$ ¹⁾ один раз отними, другой раз прибавь,

и (это есть) в первый раз 20,0, во второй 10,0. 20,0 площадь первого поля, 10,0 площадь второго поля».

Чтобы понять смысл проделанных здесь вычислений, необходимо попытаться выяснить, что означает первое вычисление выражение (1), если исходить из данных определений. Согласно этим определениям

$$\Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) = G_1 + G_2 - \frac{S}{2\varphi} (\gamma_1 + \gamma_2).$$

Но очевидно, что общее количество зерна на полях может быть получено из удельного урожая:

$$G_1 = g_1 F_1 = \frac{\gamma_1}{\varphi} F_1, \quad G_2 = g_2 F_2 = \frac{\gamma_2}{\varphi} F_2.$$

Итак, наше выражение можно далее преобразовать в

$$\Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) = \frac{1}{\varphi} \left[\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 - \frac{S}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \right].$$

Но S по определению равно $F_1 + F_2$. Поэтому мы можем произвести дальнейшее преобразование:

$$\begin{aligned} \Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) &= \\ &= \frac{1}{\varphi} \left[\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 - \frac{1}{2} (F_1 + F_2) (\gamma_1 + \gamma_2) \right] = \\ &= \frac{1}{\varphi} \left(\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 F_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 F_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 F_2 - \frac{1}{2} \gamma_2 F_1 \right) = \\ &= \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{2} \gamma_1 F_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 F_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 F_2 - \frac{1}{2} \gamma_2 F_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2\varphi} (\gamma_1 - \gamma_2) (F_1 - F_2). \end{aligned}$$

¹⁾ Стоящее в скобках представляет собой, повидимому, примечание Нейгебауера. *Переводчик.*

Итак, смысл выражения (1) тот, что можно положить

$$\Sigma - \left(\frac{S}{2} \frac{\gamma_1}{\varphi} + \frac{S}{2} \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) = \left(\frac{\gamma_1}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi} \right) \frac{F_1 - F_2}{2}.$$

Но отсюда уже ясно и все дальнейшее: это выражение делят [ср. (2)] на $\frac{\gamma}{\varphi} - \frac{\gamma_2}{\varphi}$ и получают в (2) значение $\frac{F_1 - F_2}{2}$. Формула (3) означает только, что

$$\frac{F_1 + F_2}{2} \pm \frac{F_1 - F_2}{2} = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases}.$$

Наш пример показывает, таким образом, что, зная полусумму неизвестных, вполне сознательно стремились найти и их полуразность¹⁾.

¹⁾ Это неверно. Вообще предлагаемая Нейгебауером виртуозная и искусственная реконструкция вавилонского решения излишня. Перед нами, в сущности, крайне элементарная задача: «площадь двух полей 1800 кв. гар, получающийся с них урожай 1100 ка. Первое поле дает урожая $\frac{2}{3}$ ка с кв. гара, второе $\frac{1}{2}$ ка с кв. гара. Найти площадь каждого поля и получающийся с него урожай». От сложности применяемых Нейгебауером алгебраических формул рябит в глазах. По его мнению, вавилоняне применили вполне сознательно хитроумный алгебраический прием: путем искусственных преобразований они получили полусумму неизвестных, затем полуразность неизвестных и затем путем сложения и вычитания этих величин — каждое из неизвестных в отдельности. Однако если дать решить эту задачу любому ученику IV класса средней школы, то он проделает одно за другим все те действия, что и вавилонский математик; а между тем ни о каком «вполне сознательном» применении алгебраических преобразований здесь не может быть и речи.

В самом деле, мы имеем здесь типичную, давно набившую оскомину каждого школьника, задачу о «черпом и синем сукне» или о «смешении чая двух сортов». Как известно, и эта задача решается — и решалась несомненно уже в Вавилоне — методом ложного предположения.

Ход действия в вавилонском тексте без труда интерпретируется так:

Делаем ложное предположение, что оба поля были равны друг другу; тогда площадь каждого равняется 900 кв. гар. [В нынешней арифметике обычно делается другое предположение: что первое поле (первый сорт) было все, а второго совсем не было. Негрудно видеть, что древневавилонское допущение гораздо естественнее и вполне соответствует методу приближенных вычислений, засвидетельствованному и для древнего Вавилона: берут арифметическое среднее двух величин; если результат оказывается неверным, в него вносят нужные исправления. См. мою статью «Приближенные вычисления в древней Греции», Архив истории науки и техники, вып. IV, стр. 21 и сл.] В этом случае урожай с первого поля равен $\frac{2}{3}$ ка $\times$ 900 = 600 ка; урожай со второго поля равен $\frac{1}{2}$ ка $\times$ 900 = 450 ка. Весь урожай равен 1050 ка. Между тем фактически весь урожай равен 1100 ка, т. е. на 50 ка больше. В чем причина? Причина, конечно, в том, что поле с высоким урожаем было больше, чем мы предположили. Но каждый раз, когда мы 1 кв. гар поля с низким урожаем заменяем 1 кв. гаром поля с высоким урожаем, мы повышаем общую сумму урожая на $\frac{2}{3}$ ка — $\frac{1}{2}$ ка = $\frac{1}{6}$ ка, всего же общий урожай выше исчисленного нами на 50 ка; значит мы недосчитали $50 : \frac{1}{6} = 300$ кв. гаров поля с высоким урожаем. Итак, первое поле имеет $900 + 300 = 1200$ кв. гаров, а второе 600.

Таким образом и в этом случае Нейгебауер, введя ненужную модернизацию, тем самым преградил себе возможность убедиться в интересной зависимости между вавилонской и индийско-арабской арифметикой. *Переводчик.*

Таким образом вавилоняне понимали в совершенстве принципиальное значение этой процедуры. Ясно, что это обстоятельство очень важно и для понимания формулы решения квадратных уравнений.

б) Квадратные уравнения.

1. Разложение треугольника.

Текст, который мы здесь разбираем, не снабжен чертежом, но и терминология и вычисление показывают, что здесь речь идет об определении трех отрезков x , y_1 и y_2 , равно как и площади трапеции F_1 и площади треугольника F_2 , взаимное расположение которых показано на рис. 62. Дапо:

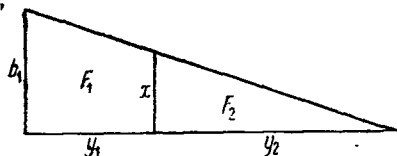


Рис. 62.

$$\begin{aligned} b_1, \\ \Delta = F_1 - F_2, \\ \delta = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

Решение, которое в тексте получается после ряда последовательных шагов, следует формулам:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta}{\delta} + b_1 \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 \right]} - \frac{\Delta}{\delta}, \quad (1)$$

$$y_1 = (b_1 - x) \frac{\Delta}{\frac{1}{2} b_1^2 - x^2}, \quad (2)$$

$$F_1 = \frac{b_1 + x}{2} y_1, \quad (3)$$

$$y_2 = y_1 + \delta, \quad (4)$$

$$F_2 = \frac{xy_2}{2}. \quad (5)$$

Теперь необходимо восстановить ход мыслей, скрытый за этими формулами. Формулы (3) и (5) непосредственно попятны и дают площади, после того как величины x и y_1 определены равенствами (1) и (2). Точно так же (4) следует непосредственно из определения δ . Кстати, из этих же формул следует, что наше допущение относительно чертежа, положенного в основу этого текста, правильно.

Чтобы понять формулы, играющие решающую роль для вычисления x и y_1 , необходимо исходить из заданной разности

$$\Delta = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} [(b_1 + x)y_1 - xy_2]$$

и воспользоваться вытекающей из чертежа пропорциональностью

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{b_1 - x}.$$

Тогда получится

$$\frac{\Delta}{y_1} = \frac{1}{2} \left(b_1 + x - x \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{2} \left(b_1 + x - \frac{x^2}{b_1 - x} \right) = \frac{\frac{1}{2} b_1^2 - x^2}{b_1 - x}.$$

Если мы допустим, что x уже известен, то тем самым, что заданы Δ и b_1 , задается уже и y_1 . Теперь заметим, что наша формула равносильна формуле (2) текста.

Из использованной уже формулы

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{b_1 - x}$$

следует, что

$$\frac{y_2}{y_1} - 1 = \frac{x}{b_1 - x} - 1$$

или

$$\frac{\delta}{y_1} = \frac{2x - b_1}{b_1 - x},$$

т. е.

$$\frac{\Delta}{y_1} = \frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{2x - b_1}{b_1 - x} = \frac{\frac{1}{2} b_1^2 - x^2}{b_1 - x}.$$

Отсюда следует, что x должно удовлетворять квадратному уравнению

$$x^2 + \frac{2\Delta}{\delta} \cdot x - \left(b_1 \cdot \frac{\Delta}{\delta} + \frac{1}{2} b_1^2 \right) = 0,$$

откуда получается

$$x = -\frac{\Delta}{\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} b_1 + \frac{1}{2} b_1^2}.$$

Если отбросить отрицательный знак перед корнем (он привел бы к отрицательному решению) и преобразовать дискриминант в сумму двух квадратов, то получается непосредственно формула (1) текста.

И в этом случае обнаруживается, что все вычисления в тексте приводят вполне целесообразным путем к решению поставленной задачи ¹⁾.

¹⁾ Эту реконструкцию я считаю в корне неправильной, несмотря на то, что дать собственную реконструкцию вавилонского решения мне не удалось. Конечно, для исследователя нашего времени не может представить трудности, составив и решив простенькое квадратное уравнение, заявить, что так именно должны были составлять и решать это уравнение вавилоняне. Однако такой вывод не был бы позволителен даже в том случае, если бы решение получилось как раз в таком виде, как у вавилонян, ибо есть очень много способов получить и интерпретировать одно и то же решение. Если же решение получается в другом виде, то к такому утверждению и вовсе нет оснований.

Но именно так поступает Нейгебауер. По его словам, решение, содержащееся в вавилонском тексте, может быть алгебраически интерпретировано так:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta}{\delta} + b_1 \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 \right]} - \frac{\Delta}{\delta},$$

где Δ — данная площадь, δ и b_1 — данные длины.

Между тем Нейгебауер при помощи сложных манипуляций получает решение

$$x = -\frac{\Delta}{\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} b_1 + \frac{1}{2} b_1^2}$$

Если мы «длину» и «ширину» обозначим соответственно через x и y , то задача сведется к определению x и y из двух уравнений:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = a,$$

$$x + y = b.$$

Находящиеся в конце текста числа и есть действительно решения соответствующего квадратного уравнения.

Принципиально интересным в этих задачах является, разумеется, не то, что для их решения необходимо справиться с квадратными уравнениями, но и неоднородная формулировка условия, причем фактически не обращается внимания на первоначальное значение терминов «длина», «ширина», «площадь». Эти три термина здесь, в самом деле, только названия для неизвестных, так что примененные для их обозначения шумерийские идеограммы по своему функциональному значению не что иное, как наши символы x , y , xy . Совершаемое в духе такой концепции умножение «площадей» друг на друга не вызывает никаких затруднений. И с чисто внешней стороны здесь перед нами, таким образом, чисто алгебраический ход мыслей.

Задачи эти имеют чисто формальный характер, хотя по своему внешнему виду они как бы прино-roleпы к вопросам практики. Это видно хотя бы из следующего примера. В нем речь идет о канале с сечением в форме трапеции, емкость которого может быть легко вычислена из данных размеров. Далее дана работа A , выполняемая одним рабочим в день. Требуется найти число рабочих A и число рабочих дней t , если, кроме того, известно, что «(числа) людей и дней сложенные равны 29;15». Здесь мы имеем, очевидно, только обрамление для системы $At = V$, $A + t = 29;15$; остается лишь радоваться, что число рабочих получается в целых числах ($A = 18$, $t = 11\frac{1}{4}$).



Рис. 64.

4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАТНЫХ ВЕЛИЧИН.

В этом и следующих примерах мы совершенно покидаем сферу задач с геометрическим обрамлением. Неизвестные, которые мы будем обозначать через y_1 и y_2 , названы здесь *igut* и *igibut*. Это аккади-

зированные сумерийские термины, происхождение которых нам хорошо известно. Это — тот же термин *igi*, который мы встречали уже в таблицах обратных значений и вообще при обозначениях дробей: *igi* n означает $\frac{1}{n}$ ¹⁾. Выражение этой дроби в виде шестидесятеричной называется, как мы знаем из других текстов, *igi-bi*; — *ит* есть не что иное, как окончание именительного падежа в аккадском языке, прибавленное к этим словам. Таким образом *igim* и *igibim* — величины, связанные между собой зависимостью

$$y_1 \cdot y_2 = 1.$$

Задачи, содержащиеся в этом тексте, таковы:

«13-ю часть суммы *igim* с *igibim* возьми 6 раз. От *igim* отними это, и остается 0;30. 1 есть площадь, *igim* и *igibim* есть что?»

В этом случае совершенно ясно, что слово «площадь» не означает ничего иного, кроме «произведения». Вторую зависимость (стоящую в условии на первом месте) можно описать при помощи формулы

$$y_1 - \frac{a}{\beta} (y_1 + y_2) = \Delta,$$

где

$$a = 6, \quad \beta = 13, \quad \Delta = 0;30.$$

Расчет, содержащийся в тексте, идет по следующей схеме. Сперва вычисляют две величины x_1 и x_2 по рецепту

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right)^2 + a(\beta - a)} \pm \frac{\beta\Delta}{2},$$

и уже отсюда определяются собственно неизвестные:

$$y_1 = \frac{1}{\beta - a} x_1,$$

$$y_2 = \frac{1}{a} x_2.$$

Значение этих преобразований становится сразу же понятным, если ввести их в первоначальное условие. Тогда получается, что x_1 и x_2 представляют собой корни уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \beta\Delta, \\ x_1 \cdot x_2 &= a(\beta - a). \end{aligned}$$

Другими словами, первоначальная задача приведена путем введения новых неизвестных к одному из двух «нормальных видов» квадратных уравнений, именно:

$$\begin{aligned} x_1 \pm x_2 &= a, \\ x_1 \cdot x_2 &= b, \end{aligned}$$

¹⁾ См. выше, стр. 22.

эквивалентных соответственно уравнениям

$$\xi^2 - a\xi \pm b = 0,$$

имеющих решения

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

и соответственно

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

И из других текстов нам известны подобные «преобразования к нормальному виду». Этот факт показывает с максимальной ясностью, как искусно умели тогда работать с алгебраическими преобразованиями. Таким образом явно подтверждается высказанный выше взгляд, что решение столь сложных задач, как эта и другие, на каждом шагу встречающиеся в текстах, должно иметь необходимой предпосылкой полное овладение соответствующими алгебраическими методами (ср. процедуру решения линейных уравнений, о которой мы говорили выше, стр. 203 и сл.). Вместе с тем способ, примененный для решения этой задачи, дает нам возможность уяснить, насколько близко подошли к вопросу о возможности двух решений при задаче на квадратное уравнение. Так как отрицательных чисел тогда не знали, то случаи, допускающие отрицательные решения, естественно отпадают, т. е. остается одно единственное возможное решение уравнения $x^2 = a$, именно $x = +\sqrt{a}$. В том же случае, когда квадратное уравнение имеет два положительных вещественных корня, преобразования, вроде выполненного здесь, должны были непосредственно обнаружить, что некоторые типы квадратных уравнений приводят к двум решениям. Преобразование, выполненное здесь, показывает только то, что элементарно-симметрические функции обоих корней рассматривали как нормальную форму квадратного уравнения. Во всех тех случаях, когда это вообще возможно (имея в виду, что все время приходится ограничиваться положительными числами), наше преобразование приводит само по себе к нахождению обоих корней в задаче на квадратное уравнение. При таком положении вещей я считал бы большим чудом, если бы вавилоняне не заметили принципиальной двойственности решений квадратного уравнения, чем то, что они ее заметили ¹⁾.

5. СЕРИИ ЗАДАЧ НА КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Известного нам в настоящее время материала достаточно для того, чтобы показать, что задачи на квадратное уравнение разрешались в самых различных формах. Но, кроме того, мы имеем также тексты, дающие целые серии аналогично построенных задач, условия которых лишь слегка варьируются. Смысл таких систематически составленных групп задач, очевидно, тот, что из совокупности задач становится ясным, каково общее правило, определяющее решения.

¹⁾ См. прямые указания на это в «Quellen und Studien...» (V, 1), В. 2, стр. 14.

Такой группой задач является, например, следующая. Требуется определить два неизвестных x и y из уравнений

$$xy = A, \quad ax = a, \quad \beta y = b,$$

если даны A , a , b и, кроме того, линейная зависимость между a и β . Перед нами ряд следующих одна за другой задач, отличающихся друг от друга только заданными зависимостями между a и β . Нам задана, например, такая группа зависимостей в восьми последовательных примерах:

1	$a + \beta = 9,$	5	$a + \frac{1}{3} (a - \beta) = 5; 20,$
2	$a - \beta = 1,$	6	$a + \frac{2}{3} (a - \beta) = 5; 40,$
3	$\frac{a}{2} + 1; 30 = \beta,$	7	$a - \frac{1}{3} (a - \beta) = 4; 40,$
4	$\frac{2}{3} a + 0; 40 = \beta,$	8	$a - \frac{2}{3} (a - \beta) = 4; 20.$

Все эти задачи, очевидно приводящие к квадратным уравнениям, имеют одну и ту же систему решений

$$x = 30, \quad y = 20, \quad a = 5, \quad \beta = 4.$$

В задачах 3—6 и 8 эти решения принадлежат к первой системе решений, в задачах 1, 2 и 7 — ко второй. (Первой системой решений я называю такую, когда в формуле решения для x берут знак $+$ перед корнем.) Другая система решений в первых шести задачах отрицательна, в задачах 7 и 8 положительна. К сожалению, наш текст не содержит вычислений, так что мы не в состоянии сказать, как поступали в этих случаях. Во всяком случае из структуры всей серии задач ясно, что они были придуманы к готовому решению. Подобные тексты с сериями задач, очевидно, были специально составлены для упражнений.

в) Биквадратные уравнения.

1. Биквадратные уравнения для «длины» и «ширины».

В одном из текстов содержится такая задача:

«Длину и ширину я перемножил, и 10,0 есть площадь.
Длину на самое себя я помножил и построил площадь.

То, на что выдается длина над шириной,
я помножил на самое себя и взял 9 раз и
такое же, как эта площадь то, что есть длина, помноженная
на самое себя.

Длина и ширина есть что?»

Задача состоит, следовательно, в том, чтобы определить x и y из формул

$$xy = F, \\ \alpha (x - y)^2 = x^2.$$

Если исключить из этой системы y , то получится для x биквадратное уравнение

$$x^4 - \frac{2aF}{a-1} x^2 + \frac{aF^2}{a-1} = 0.$$

Итак, надо решить квадратное уравнение для x^2 . Оно дает для x^2 значение

$$x^2 = \frac{aF}{a-1} \pm \sqrt{\frac{a^2 F^2}{(a-1)^2} - \frac{aF^2}{a-1}}.$$

Это решение можно упростить в

$$x^2 = \frac{F\sqrt{a}}{\sqrt{a} \mp 1},$$

откуда получается

$$x = \sqrt{a} \sqrt{\frac{F}{\sqrt{a}(\sqrt{a} \mp 1)}}$$

и

$$y = (\sqrt{a} \mp 1) \sqrt{\frac{F}{\sqrt{a}(\sqrt{a} \mp 1)}}.$$

Эти две формулы и есть как раз те выражения, которые получаются в результате процедур, содержащихся в тексте и предназначенных для определения x и y , если только в обоих случаях не принимать во внимание нижний знак ¹⁾.

¹⁾ Переводя на наш язык: площадь прямоугольника равна 600, а удвоятеренный квадрат, построенный на разности сторон, равен квадрату большей стороны. Найти длину и ширину. Как мы видели, Нейгебауер пишет систему уравнений

$$\begin{aligned} xy &= F, \\ a(x-y)^2 &= x^2 \end{aligned}$$

и из нее получает биквадратное уравнение. Естественно, что полученное им решение такое же, как в вавилонском тексте. Но эта терминология имела бы смысл только в том случае, если бы вавилоняне умели оперировать с отрицательными величинами и, извлекая корень из $9(x-y)^2$, получали бы $+3(x-y)$ и $-3(x-y)$. Однако этого не утверждает и сам Нейгебауер.

В действительности вавилоняне, разумеется, рассуждали гораздо проще: удвоятеренный квадрат разности — это то же, что квадрат тройной разности. Стало быть, тройная разность сторон равна большей стороне (рис. 65). Иными словами, если из трех больших сторон BC вычесть три малые AB , то останется еще большая сторона BC , т. е. две большие стороны BC равны трем малым AB .

Взглянув на рисунок, мы увидим, что общей мерой в этом случае будет BF , равная $\frac{1}{2}$ меньшей стороны AB ($2BC = 6BF$; $3AB = 6BF$, откуда $2BC = 3AB$),

и весь прямоугольник разобьется на шесть квадратов, площадь каждого из которых равна $600 : 6 = 100$, а сторона, следовательно, равна 10. Для получения большей стороны прямоугольника надо 10 помножить на 3, для получения меньшей — на 2.

Этот ход действия точно соответствует ходу действия в тексте; как мы видим, здесь по существу не может быть речи не только о решении биквадратного

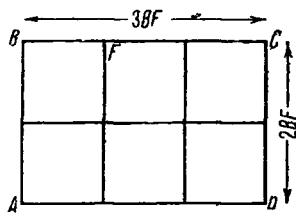


Рис. 65.

2. СЕРИЯ БИКВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

* Та же серия текстов, о которой мы упомянули уже выше, говоря о квадратных уравнениях, содержит также группы задач на биквадратные уравнения. Во всех этих случаях формулированы только условия, и для всех задач общим является условие

$$xy = A.$$

Сюда присоединяется еще вторая зависимость, которая в общем виде может быть охарактеризована как линейная зависимость между x^2 и y^2 . Наша таблица содержит 55 подобных задач, отличающихся друг от друга, как уже было сказано, только характером второй зависимости. Все они приводят к биквадратным уравнениям и все имеют решениями $x = 30$, $y = 20$. И в этом случае перед нами, очевидно, типичные упражнения, придуманные к готовым решениям.

Чтобы читатель мог получить представление о такого рода текстах с задачами, мы даем здесь эту серию из 55 примеров. № 40 невозможно восстановить ввиду порчи текста. Пропуск первого члена во всех, кроме первой, задачах отдельных групп означает лишь то, что этот член остается для всей группы неизменным.

1	$(3x)^2 +$	y^2	$= 2,21,40$
2	$+$	$2y^2$	$= 2,28,20$
3	$-$	y^2	$= 2, 8,20$
4	$(3x + 2y)^2 +$	x^2	$= 4,56,40$
5	$+$	$2x^2$	$= 5,11,40$
6	$-$	x^2	$= 4,26,40$
7	$-$	$2x^2$	$= 4,11,40$
8	$(3x + 2y)^2 +$	y^2	$= 4,48,20$
9	$+$	$2y^2$	$= 4,55,0$
10	$-$	y^2	$= 4,35,0$
11	$-$	$2y^2$	$= 4,28,20$
12	$(3x + 4y)^2 +$	x^2	$= 8,16,40$
13	$+$	$2x^2$	$= 8,31,40$
14	$-$	x^2	$= 7,46,40$
15	$-$	$2x^2$	$= 7,31,40$

уравнения, но и о решении квадратного уравнения. Ничего похожего на реконструируемое Нейгебауером решение

$$x^2 = \frac{aF}{x-1} \pm \sqrt{\frac{a^2F^2}{(a-1)^2} - \frac{aF^2}{a-1}}$$

здесь при всем желании нельзя усмотреть; равным образом здесь нет никакого следа и третьего и четвертого решений, которые получаются у Нейгебауера.

Здесь преувеличенная оценка вавилонской математики завела Нейгебауера на совершенно ложный путь, в корне извращающий истинную картину вещей! *Переводчик.*

16	$(3x + 4y)^2 +$	y^2	$= 8, 8,20$
17	$+$	$2y^2$	$= 8,15,0$
18	$-$	y^2	$= 7,55,0$
19	$-$	$2y^2$	$= 7,48,20$
20	$[3x + 2(x - y)]^2 +$	x^2	$= 3,36,40$
21	$+$	$2x^2$	$= 3,51,40$
22	$-$	x^2	$= 3, 6,40$
23	$-$	$2x^2$	$= 2,51,40$
24	$[3x + 2(x - y)]^2 +$	y^2	$= 3,28,20$
25	$+$	$2y^2$	$= 3,35,0$
26	$-$	y^2	$= 3,15,0$
27	$-$	$2y^2$	$= 3, 8,20$
28	$[3x - 2(x - y)]^2 +$	x^2	$= 1,36,40$
29	$+$	$2x^2$	$= 1,51,40$
30	$-$	x^2	$= 1, 6,40$
31	$-$	$2x^2$	$= 51,40$
32	$[3x - 2(x - y)]^2 +$	y^2	$= 1,28,20$
33	$+$	$2y^2$	$= 1,35,0$
34	$-$	y^2	$= 1,15,0$
35	$-$	$2y^2$	$= 1, 8,20$
36	$[3x - 2(x - y)]^2 +$	$(x^2 + y^2)$	$= 1,43,20$
37	$+ 2(x^2 + y^2)$		$= 2, 5,0$
38	$- (x^2 + y^2)$		$= 1, 0,0$
39	$- 2(x^2 + y^2)$		$= 38,20$
40	?		
41	$[3x + 5y - 2(x - y)]^2 +$	x^2	$= 8,16,40$
42	$+$	$2x^2$	$= 8,31,40$
43	$-$	x^2	$= 7,46,40$
44	$-$	$2x^2$	$= 7,31,40$
45	$[3x + 5y - 2(x - y)]^2 +$	y^2	$= 8, 8,20$
46	$+$	$2y^2$	$= 8,15,0$
47	$-$	y^2	$= 7,55,0$
48	$-$	$2y^2$	$= 7,48,20$
49	$[3x + 5y - 2(x - y)]^2 +$	$(x^2 + y^2)$	$= 8,23,20$
50	$+ 2(x^2 + y^2)$		$= 8,45,0$
51	$- (x^2 + y^2)$		$= 7,40,0$
52	$- 2(x^2 + y^2)$		$= 7,18,20$
53	$[2x + (x - y)]^2 +$	x^2	$= 1,36,40$
54	$+$	$2x^2$	$= 1,51,40$
55	$+$	$(x^2 + y^2)$	$= 1,43,20$

О характере формулировки этих задач в тексте мы говорили уже выше, стр. 85 и сл.; мы обратили внимание на то, что здесь, в сущности, надо говорить не о своеобразной грамматической структуре языка, а только лишь о закономерном расположении алгебраических символов.

Этот текст, однако, интересен не только своим языком чистых формул, но он поучителен и для всего типа известной категории текстов. Именно, он принадлежит, как показывает отметка внизу табличек, к целой «серии» аналогичных текстов. Наш текст пятый в этой серии; из нее же дошли до нас еще первая, четвертая, десятая, тринадцатая и четырнадцатая таблички и еще две таблички, номера которых не сохранились¹⁾, но которые несомненно принадлежат к этой же серии. Так как каждая табличка содержала приблизительно 50 таких задач, то вся серия должна была заключать не менее 650 примеров. Если, как можно надеяться, наше знакомство с этими текстами постепенно будет становиться более близким и остающиеся до сих пор пробелы будут заполнены, то мы получим возможность составить себе впечатление о первоначальном порядке расположения таких задач.

Наш пример поучителен также и для практического вопроса о площади, потребной для начертания подобных клинописных текстов. Весь текст имеет величину в $6\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{2}$ см, следовательно, он покрывал бы менее чем половину поверхности этой страницы, не считая полей. Так как табличка исписана и с лицевой и с обратной стороны (всего 132 строки, расположенные в 3 столбца), то она содержит поверхность для письма, равную $6\frac{1}{2} \times 19$ см. Перепечатка ее содержания (без воспроизведения многократно повторенного в тексте условия $xy = A$) здесь, на стр. 214 и 215, потребовала (не считая номеров примеров) $7\frac{1}{2} \times 25$ см; 25 строк на табличке занимают 90 мм, тогда как здесь они потребовали бы 102 мм печатного текста. Если бы мы передавали идеогаммы не нашими формулами, а соответственными нынешними словами, то печатный текст почти в два раза превосходил бы по занимаемому им месту текст таблички. Поэтому нашу серию, содержащую несколько сот задач, не следует представлять себе как целую гору кирпичей²⁾.

3. Другие задачи на биквадратные уравнения.

К нашей же серии текстов относится и следующая группа примеров, содержащихся на одной из табличек. Первая зависимость и здесь

$$xy = A.$$

¹⁾ Один из этих текстов находится теперь в Берлине, все остальные — в Нью-Гэвене (New Haven). Ни происхождение, ни датировка не известны («торговля древностями»!).

²⁾ Впрочем, существуют и тексты с гораздо более грубым начертанием, чем те, о которых здесь идет речь. Эти тексты требуют гораздо больше места. Но, с другой стороны, существуют и тексты с исключительно тонкими начертаниями [так, например, существует текст в 5×5 см (5 см — это 12 наших печатных строк), транскрипция которых занимает почти две страницы, исписанные сверху донизу на машинке, а перевод — почти три страницы формата нашей книги].

Вторая и здесь все время представляет собой линейную зависимость между x^2 и y^2 (получающиеся при возведении в квадрат двойные произведения следует считать известными в силу соотношения $xy = A$).

1	$x^2 + \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 16,40$
2	$+ 2 \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 18,20$
3	$- \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 13,20$
4	$- 2 \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 11,40$
5	$(x-y)^2 + \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 3,20$
6	$- \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 0$
7	$(x+y)^2 + \frac{1}{13} \left\{ \frac{1}{19} [(x+y)^2 - 10,0] + 3y^2 \right\} = 43,20$

Эти задачи и порядок их расположения незначительно отличаются от задач первой группы. Второй член поочередно имеет то положительный, то отрицательный знак и коэффициент то 1, то 2. Но особенно интересный случай мы имеем в примере 6, в котором, если и в этом случае иметь отправным пунктом систему решений $x = 30$, $y = 20$, на правой стороне должен стоять 0. В тексте при этом несколько меняется способ выражения и говорится, что оба выражения, из которых составлена линейная зависимость, «равны» друг другу.

§ 4. «ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ» ЗАДАЧИ.

В этом разделе мы будем употреблять слово «трансцендентный» в несколько ином значении, чем оно употребляется теперь. Мы понимаем под этим термином такие алгебраические задачи, которые не имели законченного решения: для их решения требовались вспомогательные приемы другого рода, именно вычислительного характера. Разобранный до сих пор материал, к сожалению, имеет очень большие пробелы в этой области, но того немногого, что находится в нашем распоряжении, достаточно, чтобы показать, что такой подход действительно существовал.

1. Кубические уравнения.

До сих пор нам известен только один текст, который, между прочим, содержит и кубические уравнения. Кстати, этот текст разломан на две части, из которых одна находится в настоящее время в Лондоне, а другая — в Берлине. К сожалению, исполнение текста далеко не блестящее: в нем целый ряд очевидных ошибок, вызванных поспешностью написания, эти ошибки делают в ряде мест толкование весьма гада-

тельными. Несмотря на это, трактовка, данная в дальнейшем изложении, может считаться в своих существенных частях совершенно несомненной. Текст представляет собой типичный сборный текст, возникший путем списывания с различных отдельных таблиц. Однако он не принадлежит к серии учебных упражнений вроде тех, о которых мы говорили в предыдущем параграфе, так как он содержит и самые вычисления. Наряду с задачами на кубические уравнения здесь, однако, содержатся и задачи, средактированные совершенно так же, как первые, но решаемые при помощи квадратных или даже линейных уравнений.

Общим во всех этих задачах является то, что в них задан объем $xuz = V$. При этом «длина» x и «ширина» y измеряются в GAR, а «глубина» z — в локтях, согласно нормам, уже часто упоминавшимся нами (вертикальные отрезки измеряются в локтях, а горизонтальные размеры — в GAR, причем 1 GAR = 12 локтям). Поэтому если дано, что длина равна глубине, то мы должны, чтобы не отступать от чисел, содержащихся в тексте, писать не

$$x = z,$$

а

$$\mu x = z,$$

где $\mu = 12$ есть отношение GAR к локтю.

Если сделать такое соглашение, то можно оставить без изменения все числа текста, не называя в то же время каждый раз тех мер, в которых каждая величина выражена. В дальнейшем коэффициент $\mu = 12$ надо всегда понимать в этом смысле.

Простейшим случаем в наших примерах является случай ч и с т о г о кубического уравнения. Дано

$$\mu x = z, \quad y = x, \quad xuz = V.$$

Из этих данных непосредственно следует, что

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\mu}}.$$

Как раз такое выражение и составляется в тексте; при этом пользуются таблицами кубических корней, о которых мы уже говорили в гл. I (стр. 48).

Более общий тип кубических уравнений сохранился в трех приводимых ниже примерах. В первом задано следующее:

$$\mu x = z, \quad xy + xuz = a, \quad ax = y,$$

причем известно, что

$$a = 1;10, \quad \alpha = 0;40$$

(и, как всегда, $\mu = 12$). В тексте составляется выражение

$$\frac{\mu^2}{\alpha} a,$$

и при подстановке заданных чисел получается 4,12. Чтобы понять значение этого вычисления, нужно лишь обратить внимание на то, что для решения нашей задачи надо найти x из уравнения

$$a\mu x^3 + ax^2 = a.$$

Поэтому, если обе части помножить на $\frac{\mu^2}{a}$, то результат получится в виде

$$4,12 = (\mu x)^3 + (\mu x)^2.$$

В тексте сказано без всякого объяснения, что эта зависимость имеет решение

$$\mu x = 6;$$

затем путем умножения на $0;5 = \frac{1}{\mu}$ находят, что $x = 0;30$, и наконец обычным путем находятся y и z .

Ничем не обоснованное решение кубического уравнения

$$(\mu x)^3 + (\mu x)^2 = \frac{\mu^2}{a} a,$$

данное здесь, было бы для нас сплошной загадкой, если бы мы не знали, что существовали таблицы, в которых было указано для последовательных целых чисел n , какому значению n соответствует то или иное значение для $n^2 + n^3$ (ср. выше, гл. I, стр. 48). При наличии же такой таблицы можно непосредственно из нее узнать, что

$$n^3 + n^2 = 4,12$$

соответствует значению

$$n = 6.$$

Так несомненно и поступали.

Второй из относящихся сюда примеров таков:

$$\mu x + 7 = z, \quad x = y, \quad xyz = V,$$

где

$$V = 0;20, \quad \mu = 12.$$

Соответствующим кубическим уравнением будет

$$\mu x^3 + 7x^2 = V;$$

путем подстановки

$$x = \frac{7}{\mu} \xi$$

оно приводится к виду

$$\xi^3 + \xi^2 = \frac{\mu^2 V}{7^3}.$$

Текст начинается с составления выражения

$$\mu^2 V = 8.$$

Далее речь идет о делении на 7, но это деление не осуществляется, может быть, потому, что в этом случае пришлось бы делить на неправильное число. Затем прямо дается решение

$$\mu x = 1;$$

в том, что это решение верно, можно убедиться непосредственно, составив выражение $\mu^2 V$. В самом деле,

$$\mu^2 V = (\mu x)^3 + 7(\mu x)^2 = (\mu x)^2 (\mu x + 7) = 8.$$

То, что это уравнение имеет решение $\mu x = 1$, очевидно.

Третий из относящихся сюда примеров таков:

$$\mu x + 1 = z, \quad x = y, \quad x y z = V,$$

где $V = 1;45$ и $\mu = 12$. В тексте составляется выражение $\mu^2 V$, для которого, очевидно,

$$\mu^2 V = (\mu x)^3 + (\mu x)^2.$$

Решение и в этом случае дается без вывода и также основано на существовании таблицы для $n^2 + n^3$.

К самой общей форме кубических уравнений приводят два примера, отличающиеся друг от друга (кроме числового значения b) только знаком, именно

$$\mu x = z, \quad x y + x y z = a, \quad x \pm y = b,$$

причем дано, что $a = 1;10$, а $b = 0;50$ (в первом случае) и $0;10$ (во втором). Соответствующими кубическими уравнениями были бы

$$\mu x^3 + (1 - \mu b) x^2 - b x \pm a = 0.$$

В тексте вычисляется выражение $\frac{a}{\mu b^3}$ и затем в обоих случаях дается без всякого вывода решение. Если вычислить выражение $\frac{a}{\mu b^3}$, то получится

$$\frac{a}{\mu b^3} = \frac{\mu x^2 y + x y}{\mu b^3}.$$

Правую часть можно написать в виде произведения трех величин, именно

$$\frac{\mu x^2 y + x y}{\mu b^3} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z + 1}{\mu b}.$$

Исходя из вычисленного значения $\frac{a}{\mu b^3}$ (в первом примере $0;10, 4,48$, во втором — 21), текст дает непосредственно числовые решения для $\frac{x}{b}$, $\frac{y}{b}$ и $\frac{z+1}{\mu b}$ (в первом случае $0;36, 0;24$ и $0;42$, во втором случае — 3 и 2 , а для третьей величины дано ошибочно 21 вместо $3;30$); x , y и z вычисляются в тексте тем путем, что заданные значения $\frac{x}{b}$ и $\frac{y}{b}$ умножаются на b , а z находится из $\frac{x}{b} \cdot \mu b$.

Дошедшее до нас решение этих двух задач представляет собой случай, который нам еще не удалось понять на основании имеющихся в нашем распоряжении текстов. Очевидно, решающий шаг, именно нахождение числовых решений, получается и в этом случае из составленных для такого рода задач специальных таблиц. Но трудно догадаться, как могли быть построены такие таблицы. Само собой разумеется, мы можем представить себе, что пробовали ряд подходящих чисел, пока не находили нужного решения. Но против такого допущения говорит не только сложность как раз тех чисел, которые мы имеем в данном примере, но и совершенно однообразная терминология во всех наших примерах. Маловероятно, чтобы одни и те же выражения в одном случае указывали на систематически составленные таблицы, а в другом — на решения совершенно случайного характера.

К вопросу о терминологии мы вернемся еще раз ниже (см. п. 3). Здесь я хотел бы только указать на наиболее важное в принципиальном отношении. Кубические уравнения, о которых мы здесь говорили, являются, с точки зрения сил и возможностей вавилонской алгебры, как раз теми «трансцендентными» проблемами, о которых мы говорили во вступлении к этому параграфу. Решения здесь не находятся уже алгебраическим путем, как в случае линейных и квадратных уравнений: в самый решительный момент здесь привлекаются вспомогательные средства совсем другого рода, именно составленные специально для этих случаев таблицы.

2. Простые и сложные проценты.

До сих пор нам известно только два связанных текста, посвященных проблемам, упоминаемым в заголовке. Предпосылки, положенные в основу этих задач, таковы. Капитал в 1 мину приносит в 1 год 12 шекелей процентов, иными словами, так как мипа содержит 60 шекелей, 20%. Считается, что эти проценты в течение 5 лет прибавляются к капиталу, но сами процентов не приносят. Капитал удваивается, таким образом, через пять лет. С этого момента начинается новый пятилетний промежуток, но начальной суммой считается уже удвоенный капитал. Если n — число таких пятилетий, a — начальный капитал и $z = 0;12$ — процентная ставка, то окончательный капитал через $5n$ лет превратится в

$$K = 2^n \cdot a.$$

В числе других простых зависимостей такого рода имеется, например, задача: найти окончательный капитал, получающийся после $n = 6$ пятилетних периодов. Вычисление производится путем последовательного удвоения начального капитала в 1 мину, т. е. степени 2 находятся последовательно одна за другой. Принципиально интересен не этот случай, а обратный, когда по окончательному капиталу K и начальному капиталу a надо вычислить число n пятилетий, необходимых для того, чтобы a выросло в K . В этом случае речь уже идет о трансцендентной задаче, в постоянном смысле слова, именно об обращении показательной функции. К сожалению, до нас дошел только один

пример такого рода, да и этот пример формулирован так сжато, что истолкование его наталкивается на ряд трудностей. Наше знакомство с вавилонской математикой еще недостаточно для того, чтобы эти трудности можно было полностью преодолеть. Поэтому я удовольствуюсь тем, что познакомлю с положением вещей в самых общих чертах. Подробности, относящиеся к толкованию текста, заняли бы слишком много места. Они даются полностью в моем комментарии к VAT 8521 и 8528 [МКТ (V, 4), гл. VI].

Сперва находят не n , а $n - 1$, причем находят при помощи очень сложного процесса. Если буквами φ и f назвать операции, обозначенные в тексте определенными терминами, на которых мы здесь не будем останавливаться, то вычисление, содержащееся в тексте, можно описать так:

$$n - 1 = \left[\varphi \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{K}{2a} - 2a \right) + 1 \right] + f(2a) \right].$$

Термины для действий φ и f находятся в тесном языковом родстве друг с другом (мы остановимся на этом подробнее ниже), так что можно для начала попытаться просто отождествить их между собой, приняв

$$\varphi(x) = f(x).$$

Далее, исходя из самого существа задачи, конечно, естественнее всего привлечь для объяснения логарифм с основанием 2. Так, если в качестве пробы попытаться подставить

$$\varphi(x) = f(x) = \log_2(x),$$

то наша формула будет иметь такой смысл:

$$\begin{aligned} n - 1 &= \log_2 \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{K}{2a} - 2a \right) + 1 \right] + \log_2 2a = \\ &= \log_2 \frac{K}{4a^2} + \log_2 2a = \log_2 \frac{K}{2a}. \end{aligned}$$

Эта зависимость и в самом деле верна. Но наше толкование встречает следующие два затруднения. Во-первых, совершенно непонятно, для чего составлены отдельные части формулы и почему они соединены между собой именно таким образом, вместо того чтобы непосредственно и один только раз прибегнуть к логарифму при основании 2. Далее, другие места наших двух текстов противоречат пониманию $f(x)$ и $\varphi(x)$ как $\log_2(x)$. Несмотря на это, оба эти возражения не являются абсолютно решающими, так как, с одной стороны, мы в настоящее время еще не можем составить себе представления, какой характер носили тексты, посвященные решению задачи, обратной нахождению показательной функции (о том немногое, что нам известно по этому вопросу, будет сказано сейчас), а с другой стороны, и отдельные терминологические вопросы еще не выяснены в достаточной степени. Как мы говорили уже, мы не будем здесь рассматривать эти вопросы подробно,

так как мы еще только начинаем проникать в толщу этих новых вопросов. Остается лишь надеяться, что постепенно будет увеличиваться количество таких текстов, которые дадут нам возможность лучше разобраться в вопросе о взаимоотношении собственно математических текстов и таблиц.

3. Таблицы и их терминология.

Характерную особенность «трансцендентных» задач мы усмотрели в том, что специальные таблицы в этих случаях необходимы для завершения вычислений. В первый раз мы это увидели на кубических уравнениях. Несмотря на все трудности, связанные с пониманием отдельных подробностей, при вычислении сложных процентов можно считать несомненным во всяком случае то, что и здесь делается ссылка на какие-то таблицы. Чтобы понять это, необходимо несколько подробнее остановиться на терминологических вопросах. Уже в гл. I мы познакомились с тем классом таблиц, в которых для последовательных целых чисел n даются значения n^2 или же для n^2 и для n^3 даются соответствующие значения n . Поэтому эти таблицы называют таблицами квадратов чисел или соответственно таблицами квадратных и кубических корней. Для нас важна прежде всего терминология последних двух таблиц. При извлечении квадратных корней (не только в таблицах, но и в собственно математических текстах) встречается термин ib-si_8 , где ib — префикс сумерийского глагола, так что si_8 — чистый корень этого слова. Обычный перевод ib-si_8 как «корень квадратный», разумеется, представляет собой лишь простое описание математической функции этого слова в рамках нашего текста. Этот перевод является непосредственным следствием из структуры таблиц квадратных корней, в которых по большей части встречаем такой оборот:

$$n^2\text{-e } n \text{ ib-si}_8,$$

что означает примерно: « n^2 имеет квадратным корнем n ». Сходным образом обстоит дело и с кубическими корнями. Для обозначения их встречаются главным образом два оборота:

$$n^3\text{-e } n \text{ ba-si}$$

и

$$n^3\text{-e } n \text{ ba-si}_8\text{-e}.$$

ba — и в этом случае глагольный префикс, так что здесь собственный смысл термина должен заключаться в si или si_8 . Возможность двоякого способа выражения для «кубического корня» si и si_8 принципиально важна, потому что она показывает, что si и si_8 должны быть эквивалентными понятиями. Это важно по двум причинам. Во-первых, si_8 известно уже нам как термин для кубического корня; с другой стороны, нам известен аккадский эквивалент для si . Мы знаем, что si то же, что $\text{san\acute{a}nu}$, а $\text{san\acute{a}nu}$ означает приблизительно «быть равным».

Таким образом мы нашли уже одну точку опоры для наших терминов. Очевидно, первоначально они имели в виду произведение p а в н ы х чисел (кстати, я полагаю, что здесь в действительности отправляются от арифметического характера кубического и квадратного корней, а не от геометрического, как поступаем мы, говоря «к в а д р а т н ы й корень»).

Но мы можем тут же показать, что математическое применение si и si_2 не описывается еще в достаточной мере понятием равенства. В таблицах, применяемых для решения кубического уравнения, читаем:

$$(n^2 + n^3)\text{-e } n \text{ ba-si};$$

с другой стороны, и числа, получающиеся как решения в вычислениях, приводящих к решению кубических уравнений, всегда обозначаются как $ib-si_2$ и притом вовсе не только в случае чистого кубического уравнения, когда они все равны между собой (в этом случае $ib-si_2$ имеет специальное значение «кубического корня»), но и в общем случае, когда три решения имеют различные числовые величины (см. выше, стр. 220).

Итак, мы видим: si и si_2 применяются совершенно одинаково для обозначения числа n как при данном n^2 , так и при n^3 и $n^2 + n^3$, и наконец при еще более общих выражениях. Это положение дел мы можем лучше всего описать так: si и si_2 указывают на то, что должен быть образован аргумент n для функции $f(n)$.

В случае вычисления сложных процентов в тексте, на том месте, где мы поставили $f(x)$, стоит термин $ba-si$, а в том месте, где мы поставили $\varphi(x)$, сказано $ib-si_2$. Разобранные выше применения si и si_2 делают, в самом деле, вероятным, что si и si_2 выражают одну и ту же операцию и что мы поступили правильно, написав

$$f(x) = \varphi(x);$$

равным образом ясно и то, что оба термина указывают на соответственные таблицы.

Как было сказано уже выше, в обоих случаях толкование

$$f(x) = \varphi(x) = \log_2(x)$$

совпадает с числовыми выкладками в нашем примере. Но в других случаях это специальное толкование не подходит. Как видно из сказанного, это не является решающим доводом против нашего допущения, так как эти термины применяются для столь широкого круга значений, что они в других случаях могут иметь в виду обратные функции иного типа.

Допущение, что решение задач на сложные проценты основывается на таблицах, дающих возможность тем или иным образом найти обратную функцию к показательной, получает дальнейшее подтверждение в том обстоятельстве, что мы знаем таблицы, посвященные показательным функциям. Наиболее простым примером является следующий текст:

9 a-га 9	1,21
a-га 9	12, 9
a-га 9	1,49,21
a-га 9	16,24, 9
a-га 9	2,27,37,21
a-га 9	22, 8,36, 9
a-га 9	3,19,17,25,21
a-га 9	29,53,36,48, 9
a-га 9	4,29, 2,31,13,21

Сразу же видно, что здесь даны последовательные степени 9, начиная от 9^2 и до 9^{10} . Такие же таблицы (типа c^n) мы имеем при n от 1 до 10 для $c = 9$, $c = 16$, $c = 1,40$, $c = 3,45$. Обратные функции, находимые по этим таблицам, будут, таким образом, логарифмами с основанием c . $c = 2$ не содержится в этих таблицах, но мы видим, что c — всегда квадратное число. Однако материал слишком скудеп, чтобы мы могли решить, имеем ли мы дело со случаем или с характерным свойством этих таблиц. Как бы то ни было, с этой новой группой текстов было связано множество вопросов, — прежде всего, разумеется, вопрос, вкратце затронутый нами уже выше, именно об интерполяции в такого рода таблицах. При отыскании обратных значений постоянно снова и снова возникает вопрос, какие значения следует вносить в таблицу, когда целым значениям функции соответствует не целое значение аргументов. На этот вопрос математические тексты, поскольку они нам известны, в настоящее время не дают еще удовлетворительного ответа: исключая лишь приближенные значения квадратных корней (см. выше, стр. 49), в наших текстах нет сколько-нибудь надежных точек опоры для решения таких вопросов. Зато астрономические тексты, касаясь проблем совершенно иного содержания, дают возможность продвинуться несколько вперед и в этих вопросах. Однако подробнее остановиться на этих вещах мы сможем только в третьем томе.

Несмотря на то, что все вопросы, затронутые в этих параграфах, остались неразрешенными, нельзя не отметить, что они играют немало-важную роль для получения более или менее цельной картины вавилонской математики. В ходе нашего изложения мы показали, почему в результате переплетения целого ряда своеобразных явлений в вавилонской математике должны были выдвигаться на первый план вычислительные методы, благодаря чему она выработала действительно практическую вычислительную технику, приложимую в равной мере ко всем рациональным числам. Далее, мы видели также, что под влиянием внешнего воздействия исторических процессов вавилонская математика получила преимущественно алгебраический характер. Если взглянуть на вопрос с этой точки зрения, то математические таблицы отойдут на второй план: для алгебраических задач они играли лишь роль вспомогательного средства, правда, значительно облегчавшего число-

вые вычисления, но совершенно не существенного в математическом отношении. Эта структура достигает полного завершения лишь с включением в нее вопросов «трансцендентного» характера. На всем протяжении исторического развития методы числовых вычислений и обращение к таблицам чисел были так тесно связаны с развитием математики вообще, что вполне естественным явилось, что и при высоком развитии вавилонской математики методы числовых вычислений продолжали рассматриваться как полноправное вспомогательное средство. Как только математика, в собственном смысле слова, наталкивается на проблемы, выходящие за рамки алгебраического метода, применение математических таблиц становится из вспомогательного приема действительным орудием для решения задач.

Это развитие в известной мере вполне аналогично истории возникновения новой математики. И здесь на первых порах главным толчком явилось введение символических методов, причем те, которые их ввели, не могли и помыслить о том грандиозном перевороте, который эти новые приемы произведут. Успех «аналитической» геометрии объясняется ведь именно тем, что геометрические вопросы сводились к алгебраическому формализму. А язык алгебраических формул приводит уже непосредственно к понятию функции. Вполне сходный процесс наблюдался и в вавилонской математике. И здесь процесс алгебраизации явился истинным двигателем исторического развития, и здесь это развитие постепенно привело к чему-то вроде элементарного понятия функции. Во всяком случае, новый толчок к развитию вавилонская математика, как мне кажется, получила от применения числовых таблиц. Табулирование закономерно построенных рядов чисел типа n^2 , n^3 , $n^2 + n^3$, c^n является не чем иным, как предварительной ступенью к изучению последовательностей, которые характеризуются функциями x^2 , x^3 , $x^2 + x^3$, c^n . Ясно, что в то время никому не приходило в голову сомневаться, что такого рода таблицы функций могут быть интерполируемы, иными словами, такие таблицы вместе с своеобразным наивным представлением о непрерывности сыграли такую же роль в деле практического развития математики и в ее применениях, какую в настоящее время играет наглядный образ кривой в деле применения элементарных функций. Я думаю, что этот подход дает нам ключ к пониманию приемов вычислений в астрономии, выработавшихся в последней фазе развития вавилонской культуры.

§ 5. ОБЩИЙ ОБЗОР И ПОЛОЖЕНИЕ ВОПРОСА В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ.

Явления, о которых мы говорили в последнем разделе, показывают с максимальной отчетливостью, какую решающую роль играла числовая сторона в вавилонской математике. Факты, о которых мы говорили в начале этой книги, — именно: существование чрезвычайно практичной системы чисел, все выгоды которой были использованы до конца, — являются тем настоящим фундаментом, на котором покоится вся остальная вавилонская математика. К этому присоединилась еще развитая алгебраическая символика, получившая широкую возможность развития вследствие своеобразной истории вавилонского письма.

По всем этим причинам вавилонская математика приняла облик, значительно более близкий к арабской, чем к греческой. Но при этом важно подчеркнуть, что полное овладение областью положительных рациональных чисел в вавилонской математике есть лишь конечный результат сложных исторических процессов, обрисованных нами в основных чертах в предыдущих главах. Несмотря на внешнюю разницу, с точки зрения истории развития Вавилония стоит ближе к Египту, чем к греческому миру. Конечно, что касается Египта, то здесь не может быть речи о полном овладении областью рациональных чисел. В самом деле, египетская арифметика дробей основана на том, что систематическое применение любых рациональных чисел ограничивается определенно однообразной областью, именно дробями с числителем единица. В греческом мире, напротив, впервые подымается вопрос о понятии числа как такового. Задачей второй части этих лекций будет изучение исторических предпосылок этого явления. Но уже здесь я считаю нужным заявить, что считаю совершенно неправильным и не имеющим, в сущности, никакого смысла сведение этого явления к «специфической особенности греческого духа»; равным образом я считал бы неправильным говорить о специфической «одаренности» всех живших в Вавилонии народов к действиям с числами в противовес египтянам. Не говоря уже о том, что подобные высказывания, в сущности, не что иное, как чистосердечное признание в неумении понять разбираемое явление, — существует целый ряд умственных движений, историю которых мы еще можем проследить с полной отчетливостью и лишь благодаря взаимодействию которых становится понятным ход мыслей, подобный тому, который привел к греческой теории иррациональных чисел.

Одним из наиболее коренных различий между догреческой и греческой математикой принято считать появление в Греции п о н я т и я математического доказательства. Но положение дел существенно изменилось с тех пор, как мы узнали о высоко развитой вавилонской алгебре. Кто ставит такие вопросы, как вопрос о появлении доказательств в априорной математике, тот обязан прежде всего точно определить смысл слова «доказательство». По моему мнению, в исторических исследованиях слово «доказать» может иметь только тот смысл, что из тех или иных математических данных и зависимостей при помощи цепи логических умозаключений выводятся новые математические зависимости, причем эти зависимости не должны быть в каком бы то ни было смысле последними звеньями в цепи возможных умозаключений и самый процесс умозаключения вовсе не должен быть точно формализован и осознан как таковой. Существование доказательств в этом смысле в вавилонской математике ни в каком случае нельзя оспаривать. В самом деле, трудно представить себе, чтобы такие сложные системы формул, как те, о которых мы говорили в предыдущих разделах, могли быть получены непосредственно или эмпирическим путем. Трудно допустить что-либо другое, кроме следующего: вавилоняне приводили путем ряда последовательных умозаключений более сложные случаи к более простым. А такой способ вывода означает лишь то, что более сложные зависимости «доказываются» на основании более простых, рассматриваемых как данные.

Конечно, мы можем, во-первых, спросить, какого рода эти предпосылки, рассматриваемые как данные (это будет уже исследованием чисто логической структуры доказательства), и, во-вторых, поставить вопрос о возможности решения тех или иных задач. Но все это не имеет отношения к поставленному выше вопросу. Согласно всему тому, что нам известно в настоящее время, оба эти вопроса были, по-видимому, впервые поставлены только в Греции. Во всяком случае, мы до сих пор не имеем еще никакой опоры в тексте для допущения, что в Вавилонии пытались так или иначе выяснить, каковы, скажем, должны быть постоянные в квадратном уравнении, для того чтобы корни были вещественными или положительными. С другой стороны, однако, необходимо заметить, что выводы, которые могли бы быть сделаны из этого *argumentum e silentio*, не слишком убедительны. Наши тексты по самому своему типу таковы, что в них могут иметь место только конкретные задачи, и поэтому всякого рода задачи, приводящие к трудностям, естественно не могли в них попасть. Сюда надо прибавить еще и то, что если не все, то большая часть наших примеров, очевидно, придумана к готовым решениям. Пока в нашем распоряжении еще нет общих указаний относительно решения тех или иных типов задач; трудно сказать, имели ли уже вавилоняне хоть некоторое представление об указанных выше зависимостях и в какой мере.

Приблизительно то же можно сказать и о характере предпосылок, положенных в основу той или иной цепи умозаключений. Материал, содержащийся в наших текстах, в общем еще слишком отрывочен. Тенденцию рассматривать все тексты, находящиеся в нашем распоряжении, как некую цельную систему, надо признать ошибочной. Каждый текст (или каждая группа текстов) был написан с какой-либо определенной специальной целью. Если тот или иной разбираемый нами текст составлен для разрешения определенных геометрических проблем, то из него нельзя без дальнейших разговоров умозаключать к общему методу, применяемому для тех или иных вопросов чисто словесного характера, например для нахождения приближенных значений корня: предпосылки, лежащие в основе текстов одной группы, могут быть совсем иными, чем в другой.

При всех этих вопросах нельзя забывать, что мы, по существу говоря, не знаем ничего о положении вавилонской математики в рамках культуры того времени. В Греции положение вещей совершенно иное. От Греции до нас дошли законченные математические произведения: таковы труды Евклида, Архимеда и Аполлония, Паппа. Нам известна общая тенденция этих произведений, и потому мы вправе видеть в них научные математические произведения в нынешнем смысле слова; что же касается клинописных математических текстов, то определить их место и роль чрезвычайно трудно. Лишь одно решение можно считать заведомо неверным, хотя оно и наиболее простое и удобное: что математические тексты относятся к числу астрономических, т. е. в последнем счете астрологических, иными словами, относятся к области религии. Из известных нам до сих пор текстов следует с максимальной ясностью, что содержание и формулировка математических вопросов были совершенно независимы от каких бы то ни было проблем, которые

могли бы возникнуть из астрономии. Но, не говоря уже об этом, математические тексты восходят к эпохе, которая более чем на тысячу лет древнее, чем астрономические тексты, содержащие систематические вычисления. Наоборот, я склонен думать, что развитие вычислительной астрономии в первой половине первого тысячелетия в существенных чертах обусловлено уже достигнутым высоким уровнем математики, в собственном смысле слова. В третьем томе этой работы мы еще вернемся к вавилонским методам, применявшимся для описания таких сложных процессов, каковы, например, движения Луны и планет, и остановимся на них подробно, причем мы рассмотрим вопрос, каким образом вавилонянам путем применения таблиц удалось положить в основу этих описаний изображение роста функций.

Итак, мы снова принуждены вернуться к вавилонскому методу характеристики функций при помощи табулирования значений функций, взятых, скажем, на равных расстояниях друг от друга. И в этом случае, как мне кажется, греческая математика сделала новый шаг решающего значения, подвергнув систематическому анализу понятие непрерывности. На этом участке развитие математики находится в тесной связи с атомизмом, а следовательно, и с проблемами, относящимися к иррациональным числам.

Если, как было сказано выше, связь с астрономией не может служить критерием для установления роли вавилонских математических текстов в вавилонской культуре, то, с другой стороны, нелегко указать то место, в котором могли развиваться подобные вопросы. Египетские математические тексты вполне естественно относить к области организации управления государством и храмом. Это, очевидно, должно быть верно и для древнейших вавилонских планов полей, равно как и для простейших типов таблиц. Но затем начинается, поскольку мы можем судить, скажем, по текстам эпохи Хаммураби, развитие чисто алгебраической математики, очевидно, не стоявшей уже ни в какой связи с вопросами управления и права указанного выше типа. Поскольку мы знакомы с вавилонской культурой, мы склонны думать, что это развитие могло иметь место только в школах писцов, в которых учили также письму и языку шумерийцев; эти же школы являются источниками многочисленных текстов словарного грамматического характера, давшими нам возможность в существенных чертах восстановить этот язык и письмо. Поэтому и источниками прогресса математики мы должны считать архивы и школы храмов и органов государственного управления.

С вопросом о первом появлении подобных (я думаю, мы вправе сказать: научных) центров тесно связан вопрос о взаимной роли шумерийского и семитического элементов. Судя по тому, что нам в настоящее время известно из текстов, мне кажется, что формирование математики, в собственном смысле слова, совпадает с семитизацией Вавилонии. Конечно, история развития системы чисел и мер, равно как выработка шрифта относятся уже к шумерийскому времени. Но то, что эти процессы приняли направление, благоприятное для чисто математической проблематики, есть, по моему мнению, результат систематических школьных штудий, которые велись семитами на материале культурных завоеваний, перенятых ими от шумерийцев, так что и в этом

случае наслоение типов народностей с совершенно различными историческими предпосылками послужило отправным пунктом для нового направления развития.

Хронологические возможности для такого рода развития достаточно широки. Мы знаем, что семитизация Вавилонии ни в каком случае не совершалась быстро или сразу. Уже в середине третьего тысячелетия семитизация Вавилонии настолько подвинулась вперед, что она могла в эпоху Саргонидов проявиться и в виде внешнего политического акта. Но, с другой стороны, мы знаем, что сумерийский элемент тогда еще не исчез, что, наоборот, у него хватило сил для нового культурного расцвета при III Урской династии. Лишь с этого времени сумерийский язык начинает все больше исчезать как разговорный, до тех пор, пока при династии Хаммураби семитизация Вавилонии не приходит к окончательному завершению. Поэтому допущение, что систематическое изучение письма и языка сумерийцев, их учреждений хозяйственного и юридического характера и т. д. сыграло существенную роль в развитии вавилонской математики, ни в каком случае не вынуждает нас относить зарождение математики, в собственном смысле слова, к чисто сумерийской эпохе. Как раз эта эпоха взаимодействия обоих этнических элементов, как я думаю, имела решающее значение для формирования математики. Промежутка более чем в половину тысячелетия несомненно достаточно для хронологической локализации периода, доисторического по отношению к математике эпохи Хаммураби, от которой до нас дошла большая часть собственно математических текстов.

Само собой разумеется, что во всех общих вопросах подобного рода нам приходится ограничиться догадками. Необходимо еще раз обратить внимание на крайнюю скудость материала, содержащегося в наших источниках. Из приблизительно 100 000 клинописных текстов, рассеянных в настоящее время по музеям всего мира, разумеется, лишь очень незначительную часть составляют тексты математического характера. Тем не менее я считаю совершенно невероятным, что весь наш запас математических текстов сводится только к неполным двум сотням математических таблиц и только приблизительно к 50 собственно математическим текстам, содержащим около 500 примеров, несмотря на то, что вавилонская математика развивалась в течение более 2000 лет. Полная невозможность ориентироваться в инвентаре большей части музеев и глубокое отвращение их руководящих органов к подобного рода текстам являются причиной того, что о развитии математического мышления в древнем Востоке мы знаем так мало, — много меньше того, что мы знали бы, если бы единственной препятствующей причиной были случайности, поведшие к гибели значительной части текстов. Несмотря на все это, я убежден, что даже этого незначительного материала достаточно, по крайней мере, для того, чтобы иметь право установить несколько существенных вех в развитии математики догреческого периода. Мы получаем, таким образом, возможность установить один из довольно прочных устоев для реконструкции истории математического мышления в античном мире. Вторым опорным пунктом являются, разумеется, классические произведе-

ния греческой математики. Для промежутка, наиболее интересного в истории идей, — именно от эпохи ионийского преобладания до Евклида, — наши источники оставляют нас в почти полном неведении. Поэтому задача будущей истории математики состоит в том, чтобы, подвигаясь от обеих крайних точек, именно со стороны древнего Востока вперед и от классической греческой эпохи назад, восстановить процессы, приведшие к тому, что кратко характеризуется понятием «греческая математика».

Если вся наша проблематика ориентируется на связи между математикой древнего Востока и греческой, то причина этого, разумеется, в том, что математика Возрождения, а следовательно, и наша в основе своей имеют исходным пунктом греческую математику. Но при более широком подходе к вопросу становится ясным, что это далеко не единственно возможная точка зрения. Уже древнейшее развитие математики Двуречья вынуждает нас обратить взор на Восток. В нашей книге мы всегда ради краткости говорим о «сумерийцах», и этого вполне достаточно для нашей цели. Однако фактическое положение вещей в раннюю эпоху сумерийской культуры было несомненно значительно сложнее. Так, например, в настоящее время нам уже известно, что в древнейший период письменной традиции, т. е. прежде всего на фазе почти пиктографических текстов, сходные между собой тексты находятся как на окраинах древней Персии (протоэламские тексты), так и в Джемдет Наср (Djemdet Nasr) недалеко от Киша и Вавилона, равно как и на юге страны. Конечно, при такого рода отождествлениях необходима величайшая осторожность; однако уже в настоящее время ясно, что и тексты с Инда имеют целый ряд точек соприкосновения с этими протоэламскими и древнесумерийскими текстами. Это видно, во всяком случае, из наличия таких текстов и в Месопотамии. Все эти вопросы можно считать относящимися и к истории математики, по крайней мере постольку, поскольку они — как мы отметили в гл. III — имели существенное значение для развития системы чисел. Равным образом эти вопросы не лишены значения и для дальнейшей истории. Нам известно, что, например, хеттский язык перенял своеобразную шестидесятерично-десятичную систему вавилоно-ассирийского обозначения чисел. Можно представить себе, что подобные же влияния простираются и до более поздней индийской системы чисел. В самом деле, история индийской математики и астрономии до сих пор находится в плачевном состоянии.

Причина этого заключается не столько в недостатке исследователей, как скорее в том, что до сих пор еще ни один источник не появился в безупречном издании. Поэтому все, что нам известно, основано на более или менее случайно выхваченных из контекста отрывках. Научное исследование этой огромной области, заслуживающей серьезного внимания, сможет начаться лишь с тех пор, когда сами источники будут подвергнуты планомерному и систематическому изучению. То же относится, вероятно, еще в большей мере к китайской математике и астрономии. Действительно же полную картину развития математики во всех ее ветвях мы получим лишь тогда, когда и к математике древнего Востока начнут планомерно применять те методы,

которые для других отраслей научной историографии давно стали общим местом.

Но и для истории, в более узком смысле слова, — для изучения преемственности между античной математикой и математикой Возрождения, — еще почти вся работа впереди. Наше знакомство с арабской математикой и астрономией покоится на основе, немногим более прочной, чем знакомство с индийской. Я считаю несомненным, что изучение арабского материала на основе безупречных изданий текстов, а не только на основе произвольно выхваченных отрывков и плохих латинских переводов, которые до сих пор являются поневоле почти единственным нашим источником, даст еще очень много нового и для понимания предшествующих периодов как греческого, так и восточного. Итак, за какой бы вопрос мы ни взялись, всюду стоит еще ряд неразрешенных новых задач; поэтому данная нами картина является только первым наброском тех взаимоотношений, детальное изучение которых пока может являться лишь программой будущего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ V.

Различные работы (с 1929 г.) были опубликованы в журналах:

(V, 1) *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, раздел B, Studien, Berlin, Julius Springer, 1929 и сл. Сокращенное обозначение: QS B.

(V, 2) *Archiv für Orientforschung*, Berlin. Сокращенное обозначение: AfO.

(V, 3) *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale*, Paris, Ernest Leroux. Сокращенное обозначение: RA.

Полное собрание всех ставших мне доступными математических клинописных текстов издано мною с переводом и комментарием:

(V, 4) *Neugebauer O., Mathematische Keilschrifttexte, Quellen und Studien zur Gesch. d. M.*, раздел A, т. 3. Berlin, Julius Springer. Сокращенное обозначение: МКТ.

КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ У ВАВИЛОНЯН.

Недавно О. Нейгебауер опубликовал ²⁾ впервые текст древневавилонской эпохи, чрезвычайно важный вследствие тех выводов, которые из него можно сделать. В этом тексте наряду с линейными и квадратными уравнениями встречаются и задачи на кубические уравнения (эти задачи идут в тексте под номерами 1, 2, 3, 12, 14, 15). В этих задачах Нейгебауер усматривает формальную алгебру, «ни в каком случае не апеллирующую к какой-либо конкретной задаче». Однако я не считал бы правильным рассматривать однотипные задачи, в которых три неизвестных x , y и z названы длиной, шириной и высотой, xy — поперечным сечением, а xyz — объемом, как уже оторвавшиеся от их геометрической основы, из которой они, во всяком случае, возникли, и думаю, что, только идя этим путем, можно приблизиться к решению задач № 2 и 3, до сих пор еще не истолкованных надлежащим образом. Условия этих задач таковы ³⁾:

№ 14. I) $xyz = 1\frac{1}{2}$,

II) $y = x$,

III) $z = 12x$;

№ 15. I) $xyz = 1\frac{3}{4}$,

II) $y = x$,

III) $z = 12x + 1$;

№ 1. I) $xyz + xy = 1\frac{1}{6}$,

II) $y = \frac{2}{3}x$,

III) $z = 12x$;

№ 12. I) $xyz = \frac{1}{18}$,

II) $y = x$,

III) $z = 12x + 7$;

№ 3. I) $xyz + xy = 1\frac{1}{6}$,

II) $x - y = \frac{1}{6}$,

III) $z = 12x$;

№ 2. I) $xyz + xy = 1\frac{1}{6}$,

II) $x + y = \frac{5}{6}$,

III) $z = 12x$.

¹⁾ Настоящее приложение представляет собой перевод статьи Курта Фогеля (Kurt Vogel), *Kubische Gleichungen bei den Babyloniern?*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, 1934, вып. 4, стр. 87—94.

²⁾ Über Lösung kubischer Gleichungen in Babylonien, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-phys. Klasse, стр. 316—321, 1933.

³⁾ Чтобы не отвлекать внимания читателя от существа вопроса, я все числа шестидесятеричной системы перевожу в десятичную. *Переводчик.*

Самая простая из этих задач — № 14. Она приводит к «чистому уравнению».

Идя алгебраическим путем, мы сразу же получаем

$$12x^3 = 1\frac{1}{2}; \quad x^3 = \frac{1}{8}; \quad x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}; \quad z = 6.$$

Но, с нашей точки зрения, мы имеем здесь геометрическую задачу, причем существенную роль играет следующая особенность вавилонской математики: при вычислении объемов, как известно, высота

измеряется в локтях, тогда как ширина и длина поперечного сечения — в гарах (1 гар = 12 локтям)¹⁾. Отсюда следует, что мерой объема служит не куб, а слой (рис. 66), именно параллелепипед с квадратным гаром в основании (1 кв. гар = 1 сару) и с высотой в 1 локоть²⁾. Я буду называть эту единицу объемным саром.

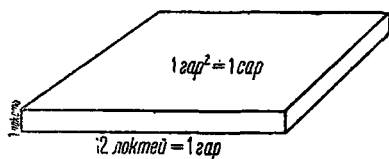


Рис. 66.

Эта метрологическая особенность объясняет и то обстоятельство, почему во всех шести задачах (в уравнении III) всегда встречается множитель 12.

Согласно сказанному, тело, о котором говорится в № 14, — это куб с объемом $V = 1\frac{1}{2}$ объемных сара = $\frac{1\frac{1}{2}}{12}$ куб. гара. Тогда сторона куба будет $\frac{1}{2}$ гара = 6 локтям. При таком толковании становится понятным термин «квадратный корень» (*ib—DI*) для стороны куба: здесь требуется найти сторону квадратного сечения x^2 ³⁾.

Несколько трудней задачи № 1, 12, 15. Они все объединены Нейгебауером в одну группу, которую он назвал «каноническим видом».

¹⁾ См., например, B. Thureau-Dangin, *Revue d'Assyriologie*, т. 29, стр. 118, 1932; H. W asch ow, *AfO* (=Archiv für Orientforschung), т. 8, стр. 129, 1932.

²⁾ Такая реконструкция мне кажется слишком сложной; проще и в этом случае, как и в остальных задачах, раздробить длину и ширину в локти. Тогда для выражения объема в куб. локтях надо будет числа, выражающие длину и ширину в гарах, увеличить каждое в 12 раз, а высоту, выраженную в локтях, оставить без изменения. При этом цифра, выражающая объем, увеличится в 144 раза и объем окажется равным 216 куб. локтям. Но все тело, очевидно, — куб, каждое ребро которого имеет $\sqrt[3]{216}$ локтей и, следовательно, каждое из

этих ребер равно $\sqrt[3]{216} = 6$ локтям, а x (длина в гарах) = $\frac{1}{2}$. Переводчик.

³⁾ Thureau-Dangin, *Zeitschrift für Assyriologie*, т. 15, стр. 112 и сл.; H. W asch ow, *AfO*, т. 8, стр. 131, 1932. Кроме того, Neugebauer, *Zur Entstehung des Sexagesimalsystems*, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Mathem.-phys. Klasse, N. F.*, т. 13, стр. 281. О таких же представлениях в греческой математике см. H. Gerstinger-K. Vogel, *Eine stereometrische Aufgabensammlung in Pap. Gr. Vindob.* 19996, Wien 1932, стр. 52.

Подумаем, как можно их истолковать геометрически. Начну с № 15. Так как $x = y$, то поперечное сечение — квадратное, а высота (согласно условию III) на 1 локоть длинней, чем сторона этого квадрата. Это дает куб x^3 с наложенным на него параллелепипедом с высотой в 1 локоть (рис. 67). Объем этого тела $1\frac{3}{4}$, но он измерен в объемных сарах; если его раздробить в куб. локти (путем умножения на 144), то получим 252 куб. локтя. Весь объем (куб + слой вышиной в 1 локоть) равен, следовательно,

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252;$$

На опубликованной Нейгебауером ¹⁾ замечательной табличке Переднеазиатского отделения Берлинских музеев даны суммы величины $n^3 + n^2$ для всех n от 1 до 60. В этой табличке непосредственно прочитываем значение 6 для $12x$. Таким образом, сторона куба равна и в этом случае 6 локтям.

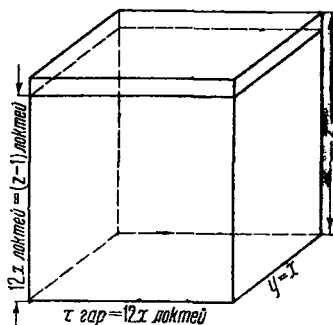


Рис. 67.

В № 1 ширина составляет $\frac{2}{3}$ длины; во всем прочем задача совершенно тождественна с № 15 с той лишь разницей, что в № 15 под z подразумевается вся высота тела. Можно начать с того, чтобы путем прибавления

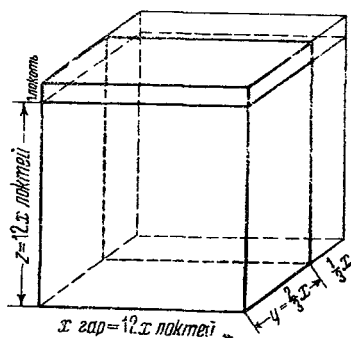


Рис. 68.

$\frac{1}{2}$ объема дополнить поперечное сечение до квадрата (рис. 68) ²⁾, после чего получаем $V' = 1\frac{3}{4}$ объемного сара = 252 куб. локтям. Квадратный корень из квадрата, лежащего в основании, или, что то же, сторона куба равна 6 локтям, как и в предыдущем случае.

В № 12 на куб x^3 (x в гарах) наложен слой в 7 локтей вышиной. Весь

объем в куб. локтях будет, следовательно, $\frac{1}{18} \cdot 144 = 8$. Из уравнения

$$(12x)^3 + 7 \cdot (12x)^2 = 8$$

могли путем непосредственной догадки получить решение $12x =$ локтю. Но возможно, что наряду с таблицами для величин $n^3 + 1 n^2$ существовали и таблицы для величин $n^3 + 2n^2$, $n^3 + 3n^2$, ..., $n^3 + 7n^2$ и т. д. Таким образом в нашем случае на куб с длиной ребра в 1 локоть

¹⁾ См. выше, стр. 48—49. *Переводчик.*

²⁾ Пока текст не известен во всех подробностях, я не могу утверждать, что этот шаг действительно осуществлялся таким образом.

(равный $\frac{1}{12}$ гара) наложено еще 7 куб. локтей (рис. 69). Весь объем равен 8 куб. локтям, или $\frac{8}{144}$ объемного сара ¹⁾.

Наиболее сложные задачи № 2 и 3 образуют группу, которую Нейгебауер назвал «*общим видом*». Если в задаче № 3 заменить $1\frac{1}{6}$ через a , 12 — через μ , $\frac{1}{6}$ — через b , то получится уравнение

$$\mu x^3 + (1 - \mu b) x^2 - bx - a = 0;$$

этот вид при помощи преобразования $\xi = x + a$ можно привести сначала к виду

$$\xi^3 + a_1 \xi^2 = a_2$$

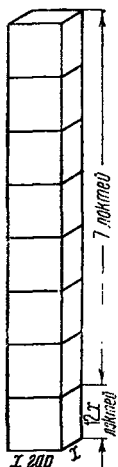
и затем путем деления на a_1^3 к виду

$$\xi_1^3 + \xi_1^2 = a^3.$$

Нейгебауер указывает при этом на то, что все необходимые для этой цели отдельные операции были известны в древневавилонской математике. Хотя как раз в задаче № 3 (и в № 2, принадлежащей к той же группе) рассуждение не идет таким образом, Нейгебауер считает допустимым, имея только этот текст, признать такое модернизаторское решение подлежащим обсуждению.

В действительности в тексте нет и следа преобразования уравнения к каноническому виду; здесь образуется выра-

Рис. 69. жение



$$\frac{x^2 y + \frac{xy}{\mu}}{b^3} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{x + \frac{1}{\mu}}{b} = \frac{x}{b} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z+1}{\mu b} = 21$$

и отсюда получается непонятным путем сразу же

$$\frac{x}{b} = 3, \quad \frac{y}{b} = 2, \quad \frac{z+1}{\mu b} = 3 \frac{1}{2}.$$

Мы не можем понять этого перехода, так как здесь какой-то несомненный пробел в нашем знакомстве с вавилонской математикой; однако этот пробел нетрудно заполнить, если подойти ко всей задаче в целом с геометрической точки зрения.

Представим себе и в этом случае куб с ребром x , на который наложен слой в 1 локоть вышиной (рис. 70). Отсечем (при помощи сечения, параллельного передней поверхности) от ширины отрезок, равный $\frac{1}{6}$ гара, тогда остаточный параллелепипед $ABCDEFGH$ и представляет собой то тело, о котором идет речь в задаче; объем этого тела и в этом случае задан в виде $xuz + xy = 1\frac{1}{6}$ объемных саров.

¹⁾ Два остальных действительных решения иррациональны.

Если мы образуем выражение

$$\frac{xyz + yx}{\mu} = x^2y + \frac{xy}{\mu},$$

то его числовое значение $\frac{7}{12}$ будет выражать как раз объем в куб. гарах.

Вычислитель мог поступать таким образом: он представляет себе подобное искомому, но большее тело, так чтобы разность $x - y$ между сторонами основания равнялась не $\frac{1}{6}$ гара, а целому гару. Тогда объем этого тела в 6^3 раз больше искомого или равен $\frac{7}{12} \cdot 216 = 21$ куб. гар. Для вычисления трех ребер L , B , H параллелепипеда могли составить такую таблицу, чтобы $L - B$ всегда равнялось единице, именно

$L = 6x$	$B = 6y$	$L \cdot B$	Объем	$H = 6h$
2	1	2	21	$10 \frac{1}{2}$
3	2	6	21	$3 \frac{1}{2}$
4	3	12	21	$1 \frac{3}{4}$
5	4	20	21	$1 \frac{1}{20}$

Так как $H > L$, то для нашей задачи следует принять в соображение только две первые строки таблицы. Так как далее должно существовать равенство $H = L + 6$ локтей ($= L + \frac{1}{2}$ гара), то единственным решением будет $L = 3$, $B = 2$, $H = 3 \frac{1}{2}$. Разделив каждую из трех полученных величин на шесть, получим $x = \frac{1}{2}$ гара, $y = \frac{1}{3}$ гара, $h = \frac{7}{12}$ гара; тогда $z = \frac{1}{2}$ гара $= 6$ локтям, и, следовательно, наложенный слой действительно имеет в высоту 1 локоть.

Аналогичным образом может быть решена и задача № 2. Здесь вместо разности $x - y$ дана сумма $x + y$, равная $\frac{5}{6}$ гара. Чтобы получить тело, подобное заданному, так чтобы у него $x + y = 1$ гару, необходимо помножить каждое из

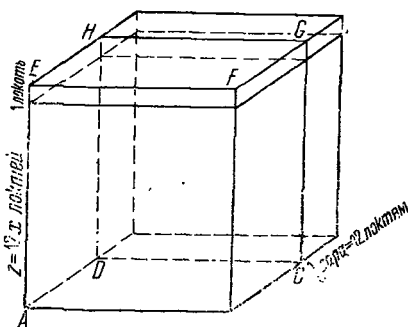


Рис. 70.

трех ребер на $1 : \frac{5}{6} = 1\frac{1}{5}$. Объем заданного тела равен $1\frac{1}{6} : 12 = \frac{7}{72}$ куб. гара, объем конструируемого нами подобного тела в $(\frac{6}{5})^3$ раз больше, т. е. он равен $\frac{21}{125}$ куб. гара.

Если и для этого случая составить таблицу, так чтобы в нее вошли половины, трети, четверти, пятые, шестые и десятые (ничто не говорит против того, что такая таблица может быть распространена и на более мелкие части), то, если принять во внимание, что $L > B$, получается следующее ¹⁾:

$L = x \cdot 1\frac{1}{5}$	$B = y \cdot 1\frac{1}{5}$	$L \cdot B$	Объем	$H = h \cdot 1\frac{1}{5}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{13}{15}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{131}{625}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{21}{125}$	$1\frac{1}{20}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{336}{375}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{189}{250}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{7}{10}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{125}$	$\frac{84}{125}$

Из предпоследней строки ²⁾ получаем (умножив на $\frac{5}{6}$) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $h = \frac{7}{12}$. Таким образом и в этом случае h на 1 локоть больше,

¹⁾ Разумеется, у автора таблица эта дана в шестидесятеричных дробях и составлена точно по образцу дошедших до нас вавилонских таблиц. *Переводчик.*

²⁾ h в заданном теле равнялся $x + 1$ локтю или $x + \frac{1}{12}$ гара; в конструируемом подобном теле он должен равняться $(x + \frac{1}{12}) \cdot 1\frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}x + \frac{1}{10} = L + \frac{1}{10}$, что удовлетворяется только в предпоследней и пятой строках таблицы. *Переводчик.*

чем ребро x . Пятая строка также дала бы правильное решение, именно $x = \frac{7}{12}$, $y = \frac{1}{4}$, $h = \frac{2}{3}$ ¹⁾.

Каков же смысл всех этих задач? Будем ли мы их вместе с Нейгебауером толковать чисто алгебраически или, как мы поступили в этой статье, геометрически; во всяком случае, дело здесь сводится к пользованию вспомогательными таблицами для числового решения задач, во всем прочем не представляющих больших трудностей. Быть может, мы вправе относить эти задачи к области сакральной геометрии. Мы знаем, что в развитии древнеиндийской геометрии сыграли значительную роль некоторые определенные, нам еще не ясные представления о форме и величине жертвенных алтарей ²⁾. В Индии нормальная форма алтаря — куб, но ему может быть придана сообразно с изменением предъявляемых к нему культом требований и другая форма, с тем чтобы объем оставался неизменным. При этом играет крупную роль то или иное расположение слоев и число пошедших на изготовление камней. Я позволю себе выставить еще одно недоказанное предположение: ход рассуждения, подобный тому, который мы постулировали выше, когда на куб x^3 накладывают дальнейшие слои x^2 ов, мог привести к задаче удвоения куба, известной нам из греческой математики, и притом согласно легенде — тоже в связи с алтарем.

¹⁾ Третье решение $x = -\frac{1}{3}$ как отрицательное не должно быть принимается во внимание; но в вавилонском тексте отсутствует и второе решение; видимо, это показывает, что познания в алгебре были еще не достаточно глубоки.

²⁾ B. Datta, The Science of the Sulda, Calcutta 1932.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

А

- Абсолютное позиционное значение 59
- Абсолютные обозначения 109
- Агглютинирующие языки 81
- Аин 91, 127
- Аккадские дроби 105
- Аккадский язык 77—81
- Аккадяне 60
- akālu* 73, 74, 77, 83, 187
- Алгебраический метод 201
- Алгоритмические дроби 103—109, 165
- Алеф 91
- am* 24—25
- Амарнская переписка 61
- aparas* 78
- a-ra* 36, 83, 225
- Арабская математика 227, 232
- Арабское письмо 90
- Арабы 59, 61, 63
- Арамейское письмо 90
- Арифметическая прогрессия 194—196
- Архимед 146
- Асс 118
- Ассирийские тексты 110
- Ассирия 61
- Ассур 61
- Астрономические тексты 225, 228—229

Б

- ba*, *ba-si* 223, 224
- Бактрия 59, 63
- ban* 111
- Биквадратные уравнения 9, 212—217
- Большая единица 112
- Буквенные знаки египтян 93
- Буквы Рас-Шамра 90
- bir* 111, 113, 114, 119, 120

В

- Вавилонская алгебра 6—10, 196—226, 233—239

- Вавилонская арифметика 191—:
 - астрономия 226
 - геометрия 186—191
 - математика 6—11, 13, 14—15, 18—19, 20—56, 96—125, 137—138, 186—239
 - система мер 116—120
 - — счисления 19, 59
 - — цифр 20—21
- Вавилонские дроби 103
 - тексты 23, 24, 26, 27, 32, 34, 38, 49, 85, 86, 87, 188, 195, 196, 197, 198, 204, 208, 210, 212
- Восстановление текста таблиц 47—48
- Вспомогательные числа 155—165
- Вычисление длины хорды 187
 - рациональных квадратных корней 50—55
 - объемов 234
 - *haу* 127, 159
- Вычислительная астрономия 229
- Вычислительная техника (вавилонская) 18—56
 - — (египетская) 129—138, 155—184
- Вычитание 33—34

Г

- ga* 75
- gan* 111, 113
- GAR*, *gar* 77, 116—119, 123
- Геометрическая прогрессия 196
- Герметическое письмо 88—90, 102
- Гипссы 61
- gis* 116
- Главная основа (основа 1, *Qal*) 78
- Гласные египетского языка 91
- Грамматическая структура речи 86
- Греческая алгебра 6
 - культура 63
 - математика 6, 13—14, 227—229, 231
- Греческие дроби 105
- Греческое письмо 90
- gu* 74

Д

- da... bi 24
 Два корня квадратного уравнения 211
 Двойственное число 100
 Дворежье 59—60
 Двухранный ряд 131
 Деление 24, 35, 43, 55, 108, 159
 Демотический язык 89
 Демотическое письмо 89—90
 Десятичная система 110, 113, 115, 121, 124, 129, 169
 Детерминативы 91, 92
 Джемдет-Наср 114, 231
 Дополнительные дроби 104, 108, 176
 Древнее царство 62, 92
 Древнеегипетский язык 89
 Дробь 45
 DU 76

Е

- е 49
 Египетская геометрия 5—6, 11—12, 138—155
 — математика 5—6, 11—12, 126—185, 227
 — система мер 117
 Египетские дроби 98, 101—109, 126—136, 155—185
 — задачи 128, 129, 147, 148—164
 — иероглифы 90
 — тексты 127, 129, 130, 136, 147—154, 164, 229
 Египетский треугольник 138
 Египетское письмо 87, 89, 90—91
 E-NJM 75
 ese 111, 113, 120

Ж

- Жречество 137

З

- Запятая 21
 Знак дроби 131
 Знак отделения 21
 Значения клинописных знаков 70
 ZUG, ZÜ 73

И

- igi, igi... gál, igi... gál-bi, igi nu 23, 24, 32, 33, 103, 104, 210
 Идеограмма 74
 Идеографическое письмо 86
 Иероглифическое письмо 93
 Иероглифы 62, 88—89, 91—92, 97, 101—102, 148, 150
 Издание текстов 231—232
 Изолирующие языки 81

Индексы 76

- Индивидуальные дроби 103, 106, 107, 109, 110, 115, 121
 Индивидуальные числовые знаки 97
 Индийская математика 232
 Интерполяция 55
 Иод 91

К

- КА, ка, ka 72, 73, 74, 75, 79
 kataru 85
 Канонические разложения дробей 123
 Карта Месопотамии 65
 Карфаген 63
 Каузатавная основа (основа III, *sa-tel*) 79
 Квадратные уравнения 8—9, 206—212
 Квадратный корень 6, 225,
 Квадратура круга 189
 Киш 64, 231
 Клиш 68
 Клинописные знаки 20, 25, 33, 34, 36, 70, 105, 111, 112, 114
 Клинописные (фотографии) 51, 68, 69;
 (ее приобретение) 61, 62; (техника письма) 66; (хранение в музеях) 230
 Книга мертвых 151
 Комбинированные таблицы 37—43
 Конгруэнтные числа 29
 Коптский язык 89
 Красные числа 155
 Кубические корни 6
 — уравнения 10, 217—221, 23
 239

Л

- lal 33, 34
 Латинское письмо 90
 Латинские дроби 105
 Логарифм 222, 224—225
 Логистика 6
 Локоть 116—117

М

- Масштаб чертежей 197
 Математика эпохи возрождения 231—232
 Математическая символика 8
 Математическое доказательство 227—228
 Метод ложного предположения 198, 205
 Метод переноса 174
 mei 117
 Мина 118
 Минус 34
 Московский папирус 5, 126, 128, 135, 140, 146—155
 Мохенджо-даро (Mohenjo-daro) 58, 59

Н

- nadānu* 85
 Надписи в Эдфу 139
 Наклон плоскости 141
 Направление чтения и письма 51, 68—69, 88
 Натуральные дроби 104, 165, 169
 Неизвестное 201
 Неоднородные уравнения 208—211
 Неосновные дроби 155, 163, 169
 Неправильное число 22
 Ниппур 64
 Новое царство 62
 Новоегипетский язык 89
 Нормальная таблица обратных величин 26
 Нуль 21, 110

О

- Обзорная карта 59
 Обобщенные таблицы обратных величин 32—33
 Объем 186
 — куба 142
 — усеченного конуса 143, 190
 — усеченной пирамиды 11—12, 143—146, 191
 — цилиндра 142
 Основа Nīfal (страдательная основа) 79
 — Paal (усилительная основа) 78—79
 — Qal (главная основа) 78—79
 — Šafel (наказывающая основа) 79
 Основание системы счисления 97—98
 Основное число 36, 46
 Основные дроби 103, 174, 176—177, 179
 Описание периодических процессов 34

П

- Палочки для клинописного письма 67
 Парфние 63
 Первоисточники 18
 Переднеегипетские языки 90
 Персеполь 60
 Персидские буквы 90
 Персы 63
 Пи (π) 143, 189—190
 Пиктографическое письмо 69, 87—88
 Планы полей 186
 Площадь 210
 — круга 140—141, 188, 190
 — сегмента 190
 — трапеции 138

- Площадь треугольника 5, 138—139
 — четырехугольника 139—140
 Плюс 34
 Поверхность полуцилиндра 147, 152—153
 — полушария 146—153
 — шара 5, 11, 146—153
 Половина 102
 Половинный ряд 131
 Подугласные 91
 Последовательное удвоение 160
 Позиционная система 19, 20—21, 45—46, 55—56, 59, 109, 113, 120—121, 124, 170
 Правильное число 22
 Правильные дроби 45
 Происхождение шестидесятеричной системы 121—124
 Протоэламские изображения 90
 — тексты 231
 Проценты 221—224
psw 134
 Пядь 117

Р

- r* 11
RA 76
 Разложение дробей 106—107, 166—183
 — треугольника 196—201, 203—204, 207
 Раскопки 64
 Расшифровка текста 148—153
 Рациональные числа 45
 Рим 63

С

- ŠA, ša 77
šadānu 223
šaplū 85
šā-gal 187
SAR, ŠAP, šar, šar-gal 112
še 118, 119—120
 Семитизация Вавилонии 60—61, 229—230
 Семитические языки 78, 80
 Семиты 64
 Серии задач на биквадратные уравнения 212, 215
 — — — квадратные уравнения 211
 — таблицы 37
 Сетка треугольников 28—31, 16
si, šī 223, 224
 Силлабарии 75, 82
 Силлабическое письмо 82, 86
 Символическое письмо 84
 Система мер 113, 117

- Система мер в Вавилонии 111, 116, 119—120, 124
 Системы линейных уравнений 196—206
 — счисления 96
 Сокращение слов 84
 Списки литературы 56, 94—95, 125, 184—185, 232
 Способ составления таблиц обратных величин 26—31
 — — — умножения 40—47
 Среднее гармоническое 53
 Среднее царство 62, 126, 173
 Среднеегипетский язык 89
 Страдательная основа (Nifal) 79
 Строка переноса 37
 Сузы 64
 Сумерийская система письма 70
 Сумерийские дроби 105
 — тексты 73—74
 Сумерийский язык 75, 81—82
 Сумерийцы 60, 64, 73
 Сумма квадратов целых чисел 191—194
 surabi 24—25
 šušān, šuššān 106
 šutakulu 83
 Счетные классы 98
- Т**
- tab 34
 Таблицы $n^2 + n^3$ 55
 Таблицы величин $\frac{2}{n}$ 165—184
 — для решения кубических уравнений 224
 — квадратных корней 49—50, 223
 — квадратов 39, 49, 223
 — кубических корней 49, 223
 — кубов 49
 — обратных величин 20—32, 39, 43—44, 110, 173
 — показательных функций 224—225
 — умножения 35—48, 173
 — хора 188
 Талант 118
 Тексты из Урук 110
 Теорема Пифагора 52, 138, 188
 Техника письма в клинописью 66—69
 Торговля древностями 64
 Точка с запятой 21
- Трансцендентные задачи 217—226
 Трифонсонантизм 78, 91
 Трилитерализм 78, 91
- У**
- Угловой крючок 67
 Ударение 76
 Удвоение 170
 Узловая точка 27
 Умножение 35
 Унция 107
 ур 60, 72
 урук 64, 114
 us 87, 116
 Усилительная основа (Paal) 78
 Условные обозначения 24, 73—77
 «Ученические упражнения» 22
- Ф**
- Финикийское письмо 90
 Финикия 62, 63
 Флектрующие языки 80
 Формула Герона 140
- Х**
- Хаммураби 60, 64, 72, 86
 Хараппа (Нагарра) 58, 59
 Хау 127
 Хетитские буквы 90
 Хеттские тексты 110
 Хетиты 61
 Хозяйственные тексты 186
 Хронологическая таблица 58
- Ч**
- Числа, конгруэнтные по множителю 21, 60
 Числовые знаки египтян 100—161
- Ш**
- Шепель 118—120
 Шестидесятеричная система 7—8, 19, 20—22, 109—125, 231
 Шестидесятеричные дроби 105, 167
 Школа писцов 229
- Э**
- Элам 60, 64
 Эламское письмо 90
 Эль-Амарн 61

Редакция Р. Н. Бончковского Оформление Э. М. Вейлиной.
Корректурa А. П. Татариновой. Наблюдал за выпуском В. Т. Тимофеев.

Сдано в производство 11/II-1936 г. Подписано к печати 7/I-1937 г. Печати. листов 15^{1/4}.
Уч.-ав. л. 17. Тираж 5 000. Формат 62×94^{1/16}. Колич. печ. знаков в 1 бум. листе 11 000.
Заказ № 205. Количество бум. листов 7^{5/8}. Гл. ред. общетехн. и техно-теоретической лит.
№ 8. Уполном. Главлита № В-9151.

4-я типография ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник». Ленинград, Международный, 75а.